



TITLE:

むだ時間を含む非線形振動系の研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

井上, 嘉明

CITATION:

井上, 嘉明. むだ時間を含む非線形振動系の研究. 京都大学, 1982, 工学博士

ISSUE DATE:

1982-01-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r4620>

RIGHT:

むだ時間を含む非線形振動系の研究

昭和56年11月

井 上 嘉 明

むだ時間を含む非線形振動系の研究

昭和56年11月

井 上 嘉 明

DOC

1981

18

電気系

謝

辞

本研究は、京都大学工学部林 千博名誉教授、上田皖亮助教授の御指導のもとに遂行したものを、西川禎一教授の御指導のもとにまとめたものである。この間、終始時宜にかなった御教示と御鞭撻を賜わったことに対し、深甚なる謝意を表します。また、本論文に関し有益な御助言を賜わった木嶋 昭教授に厚くお礼申し上げます。

また、現在筆者が御指導を頂いている京都大学工学部上之園親佐教授からは本研究に関し有益な御助言を賜わるとともに、終始御厚情あふれる御激励と惜しまざる御援助を賜わった。ここに衷心より謝意を捧げます。

また、本研究遂行中、有益な御討論と御助言を賜わった京都大学工学部安陪 稔助教授、三宮信夫助教授、倉光正己助手、大嶋健司助手の各位に厚くお礼申し上げます。さらに、京都大学卒業研究として、藤沢和夫、堤 祥行、中野直文、吉田智和、花崎一治、久保田龍作、高瀬冬人の各氏に御協力頂いた。

また、終始暖かい御激励と御援助を賜わった京都大学工学部岡田隆夫教授、仁田旦三助教授、河野俊彦助手、金子和博助手、松木純也助手、山本 修技官など上之園研究室と岡田研究室の各位に厚くお礼申し上げます。

本研究は以上の方々の御指導と御援助の賜物であり、ここに改めて謝意を表します。

むだ時間を含む非線形振動系の研究

目 次

謝 辞

第1章 序 論	1
1.1 本研究の目的とその歴史的背景	1
1.2 内容梗概	2
1.3 差分微分方程式	4
第2章 むだ時間を含む非線形系に対する平均法	6
2.1 準 備	6
2.2 差分微分方程式の線形自律系における分解の理論	8
2.3 差分微分方程式系に対する平均法	11
第3章 むだ時間を含む線形周期系の安定問題	13
3.1 緒 言	13
3.2 むだ時間を含む線形周期系の一安定判別法	14
3.2.1 むだ時間を含む線形周期系の安定条件と漸近安定条件	14
3.2.2 特性方程式の誘導	15
3.2.3 安定判別法	18
3.3 むだ時間を含むMathieu方程式の安定問題	20
3.3.1 むだ時間を含むMathieu方程式	20
3.3.2 特性方程式	21
3.3.3 微小な q に対する特性指数	23
3.3.4 安定領域図	31
3.4 むだ時間を含むHill-Meissner方程式の安定問題	35
3.4.1 むだ時間を含むHill-Meissner方程式	35
3.4.2 むだ時間を含む線形周期系の常微分方程式系への変換	35

3.4.3	特性方程式	38
3.4.4	安定領域図と特性指数の軌跡図	40
3.5	結 言	42
第4章	平均法による自励振動の解析	43
4.1	結 言	43
4.2	Minorsky 方程式で記述される系	43
4.2.1	Minorsky 方程式で記述される系	43
4.2.2	モード周波数と逆モード周波数	44
4.3	自励振動の解析 — 発振のモード数が1の場合	45
4.3.1	無摂動系と空間Cの分解	46
4.3.2	平均化方程式と定常状態	48
4.3.3	平均化方程式に含まれるパラメータの意味	49
4.4	自励振動の解析 — 発振のモード数が2の場合	49
4.4.1	無摂動系と空間Cの分解	50
4.4.2	平均化方程式と定常状態	51
4.4.3	平均化方程式の導出過程の再検討	54
4.5	数 値 例	54
4.6	考 察	56
4.7	結 言	58
第5章	調波解析法による強制振動の解析	60
5.1	結 言	60
5.2	強制振動の種類とその形式	61
5.2.1	強制振動の解析における仮定	61
5.2.2	強制振動の種類とその形式	62
5.3	基本調波振動	63
5.3.1	基本調波振動の定常応答	63
5.3.2	安定性の検討	64
5.3.3	数 値 例	68
5.3.4	増分記述関数による安定性の検討	72

5.4	1/3 次分数調波動	75
5.4.1	1/3 次分数調波振動の定常応答	75
5.4.2	安定性の検討	76
5.4.3	数 値 例	77
5.5	3 次高調波振動	78
5.5.1	3 次高調波振動の定常応答	78
5.5.2	安定性の検討	80
5.5.3	数 値 例	80
5.6	2 周波概周期振動	81
5.6.1	2 周波概周期振動の定常応答	82
5.6.2	安定性の検討	83
5.6.3	数 値 例	87
5.7	3 周波概周期振動	93
5.7.1	3 周波概周期振動の定常応答	93
5.7.2	安定性の検討	95
5.7.3	数 値 例	98
5.8	考 察	99
5.9	結 言	102
第 6 章	平均法による強制振動の解析	103
6.1	緒 言	103
6.2	平均化方程式の誘導	103
6.2.1	ν が ω_{i0} の近傍にある場合	103
6.2.2	ν が ω_{i0} の近傍にない場合	105
6.3	定常応答とその安定性	107
6.3.1	$\omega_1 = \nu$ の場合	108
6.3.2	$\omega_1 = \nu/3$ の場合	108
6.3.3	$\omega_1 = 3\nu$ の場合	109
6.3.4	$\omega_1 + \omega_2 = 2\nu$ の場合	110
6.3.5	$2\omega_2 - \omega_1 = \nu$ の場合	111
6.3.6	ω_1, ω_2 と ν の間に特別な関係がない場合	112

6.4 考 察	113
6.5 結 言	116
第7章 結 論	117
付録Ⅰ 無限行列式(3.10)の収束と $F(s)$ の性質 $1^\circ \sim 5^\circ$ の証明	119
付録Ⅱ (3.21)式と(3.22)式の誘導	125
付録Ⅲ 系(3.18)と系(3.48)のハイブリッド・シミュレータ構成図	129
付録Ⅳ 系(5.1)のハイブリッド・シミュレータの構成	131
付録Ⅴ 自励振動の自己変調現象	138
参 考 文 献	143

第1章 序 論

1.1 本研究の目的とその歴史的背景

系の入力と出力の間には、大なり小なり一定の時間遅れ、すなわちむだ時間が存在するのが普通であって、高周波電子回路、制御系、生体系および経済系などでは、むだ時間の存在を看過し得ない場合も多い。このような系は一般に差分微分方程式で記述される。

さて、むだ時間に起因して自励振動が生じることがある。この現象に最初に注目した人の一人はN. Minorskyであって(1942年⁽³⁴⁾)、彼は船舶の横揺れ防止装置(antirolling stabilization system)を研究するなかで、後にMinorsky方程式と呼ばれるようになった非線形差分微分方程式、

$$\ddot{u}(t) + 2\delta\dot{u}(t) + u(t) + k[\dot{u}(t-L) - \frac{1}{3}\dot{u}^3(t-L)] = 0, \quad (1.1)$$

を導き、その周期解について若干の研究を行った。^(34,35)(1.1)式はむだ時間と飽和を含む系を記述する方程式である。

Minorskyの研究を端緒として、むだ時間を含む自励振動系の研究が始められ、以後、筆者の知るだけで、約20編の論文が報告されている。解析法也多岐にわたっており、(i)多入力記述関数法、^(15, 30, 33, 41, 42)(ii)摂動法、⁽³⁶⁾(iii)平均法(漸近法)、^(16, 22, 24, 34, 35, 38, 40, 55)(iv)調和線形化法、^(19, 20, 47)(v)その他、^(4, 48)などが用いられている。ただし、後に触れるように、(iii)と(iv)に列挙した論文のなかには、解析法と結果の妥当性に疑問なものがある。系(1.1)に関する主要な、そして妥当な結果は、主として(i)に挙げた著者らによって得られている。

一方、むだ時間を含む非線形系の強制振動については、現在まで、少数の報告しかされていない。坂和・菅田⁽⁴²⁾と福岡・松原⁽⁶⁾は、自励振動が存在しない場合について、基本調波振動の応答特性を考察している。南雲⁽³⁶⁾と松原⁽³¹⁾は、自励振動が1モードの場合について、入力による自励振動の非同期抑制を論じている。さらに、V. P. Rubanik⁽⁴⁰⁾と甲田^(23, 24)は、同じ場合について、同期現象を考察している。しかしながら、これらの研究はいずれも断片的なものであり、以上の研究を総合しても、強制振動の系統的な解明がなされたと云うにはほど遠い状況である。

さて、従来、非線形常微分方程式系、とくに、強制振動系の有力な解析法として、次の2方法が知られている。⁽¹³⁾(a)調波解析法(記述関数法)によって定常応答を求め、線形時変系の変分方程式を用いて、その安定性を吟味する方法。(b)平均法によって系を自律系に変換した後、

自律系の平衡点として定常応答を求め、線形定係数系の変分方程式を用いて、その安定性を吟味する方法。

非線形差分微分方程式系に対しても、以上の(a)と(b)が有力な解析法と考えられるけれども、現状は極めて不満足である。(a)の解析法について云えば、従来はむだ時間を含む線形時変系の安定問題の研究が不十分であったところから、その適用例は報告されていない。

また、平均法による解析を扱った従来の論文は、常微分方程式系に対する平均法と同じ手順で平均化方程式を導いている。むだ時間を含む項が摂動項として取り扱える場合、言い換えれば無摂動系が常微分方程式で与えられる場合は、常微分方程式と同じ手順で平均化方程式を導出できるが、⁽¹⁰⁾ 無摂動系が差分微分方程式で与えられる一般の場合までこの方法を拡張することは問題があるように思われる。本論文が対象とするような、無摂動系が差分微分方程式で与えられる一般の場合については、関数微分方程式系(差分微分方程式はその一つのクラス)に対する平均法(J. K. Hale, 1966年⁽¹⁰⁾)を用いるべきであると考えられるが、筆者の知る限りその適用例は報告されていない。

以上のような現状を考慮して、本研究の目的を次の2点に置く。

(1) むだ時間を含む非線形系の解析法の確立。すなわち、むだ時間を含む線形周期系(線形周期係数差分微分方程式)の安定問題を考察し、これに一解答を与えることにより、上記(a)の解析法を適用可能とする。また、無摂動系が差分微分方程式で与えられる一般の場合について、平均法の正しい適用を示す。

(2) むだ時間を含む非線形系における振動現象の解明。すなわち、Minorsky 方程式(1.1)式、およびこれに強制項を付加した次式、

$$\ddot{u}(t) + 2\delta\dot{u}(t) + u(t) + k[\dot{u}(t-L) - \frac{1}{3}\dot{u}^3(t-L)] = kF\sin\nu t, \quad (1.2)$$

で記述される系を考察の対象にして、上記(a)と(b)の両解析法ならびにハイブリッド・シミュレーションによって、むだ時間と飽和を含む系における振動現象を系統的に解明する。系(1.1)あるいは系(1.2)と、van der Pol 方程式によって代表される、むだ時間を含まない(強制)自励振動系との間の、同異点を明らかにする。

1.2 内容梗概

本論文は、この序論を含めて本文7章と、付録5節とからなる。

本文第2章と3章では、解析法に関連する事柄を述べる。

第2章では、差分微分方程式系に対する平均法を説明する。Haleの定式化は⁽¹⁰⁾より広いク

ラスの関数微分方程式系を対象に行われているが、第2章では簡単のため、差分微分方程式の範囲内で説明する。

第3章では、定常振動の安定判別への応用を目的として、むだ時間を含む線形周期系の安定問題について考察する。この問題への接近法として次の3方法、(1)パラメータ値が既知の、任意の1個の線形周期系について、その系が漸近安定であるか否かを判別するための方法、(2)周期係数が小パラメータを含む場合について、特性指数と安定限界を解析的に求めるための方法、および(3)むだ時間を含む線形周期系の安定問題を、これと同じ特性指数をもつ、むだ時間を含まない線形周期系の安定問題に変換して論じる方法、を与える。そして、2種類の具体的な系について、(1)安定領域図(stability chart)、(2)特性指数の軌跡図、および(3)周期係数が微小な場合の特性指数、を与えることによって、むだ時間が系の安定性と特性指数の性質に及ぼす影響の一端を明らかにする。

第4章、5章と6章では、系(1.1)と系(1.2)における振動現象を考察する。

第4章では、平均法によって、系(1.1)における自励振動を考察する。発振のモード数が1と2の場合についての解析例を示すとともに、自励振動に関する系(1.1)の主要な性質を、数値例によって説明する。また、平均化方程式の物理的意味を述べるとともに、平均化方程式を介して、van der Pol 方程式で記述される系との同異点にも触れる。最後に、系(1.1)の解析に、常微分方程式系に対する平均法を適用することの可否について述べる。さらに自励振動に関連して、付録Ⅶで、自励振動の自己変調現象について考察する。

第5章では、自励系が複数個(2個)の発振モードを有すると云う仮定のもとで、系(1.2)で記述される系における強制振動の諸性質を解明する。振動の定常応答は調波解析法(記述関数法)によって求め、その安定性は線形時変系の安定問題として考察する。後者には、第3章における上記第2の接近法を応用するとともに、概周期振動の安定判別にも、上記方法が拡張できることを示す。また、基本調波振動に関しては、定常応答の不安定化の機構を増分記述関数を使って説明する。理論値の妥当性は、波形解析機能をもつハイブリッド・シミュレータにより確認する。最後に、系(1.1)と系(1.2)の振動系としての諸性質は、むだ時間を含まない多自由度非線形系のそれに類似であることを述べる。ハイブリッド・シミュレータの構成は付録Ⅷで説明する。

第6章では、系(1.2)における強制振動を、平均法によって解析する。すなわち、第5章と同じ仮定のもとで、系(1.2)を平均法によって解析し、結果が第5章で得られたものと一致することを示す。さらに、系(1.2)の解析に、常微分方程式系に対する平均法を適用することの可否を、数値例を挙げて論じる。

第7章は、本研究で得られた結果をまとめたものである。

1.3 差分微分方程式

本論への準備として、差分微分方程式の初期値問題と、解の安定性の定義について述べる。
差分微分方程式（関数微分方程式）の解説書としては、文献（1, 8, 12）が代表的である。

(a) 差分微分方程式の初期値問題

L_1, L_2, \dots と L_m を正の定数($L_1 < L_2 < \dots < L_m$)とすると、次の形の方程式、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t-L_1), x(t-L_2), \dots, x(t-L_m)), \\ \text{ここに, } x &: n \text{ ベクトル,} \\ f &: n \text{ ベクトル関数,} \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

は、(遅れ型の)差分微分方程式と呼ばれる。

時刻 t_0 と区間 $[t_0 - L_m, t_0]$ 上の連続関数 $\varphi(t)$ が与えられたとき、

$$t_0 - L_m \leq t \leq t_0 \text{ で } x(t; t_0, \varphi) = \varphi(t) \text{ であり,}$$

$$t_0 < t < t_0 + \tau (\tau > 0) \text{ で系 (1.3) を満す,}$$

連続関数 $x(t; t_0, \varphi)$ を見出す問題を、差分微分方程式の初期値問題と云う。 $\varphi(t)$ は初期関数と呼ばれる。

系(1.3)の右辺 $f(t, x, y_1, y_2, \dots, y_m)$ が、 t に関して連続であり、かつ、 x, y_1, y_2, \dots と y_m に関してLipschitzの条件を満すならば、解 $x(t; t_0, \varphi)$ は一意に存在し、しかも初期値 (t_0, φ) に連続的に存在する。

常微分方程式では、初期値は時刻 t_0 と n 次元ベクトル空間の点 x_0 の組、 (t_0, x_0) として与えられる。これに対し、差分微分方程式では、上述のように、時刻 t_0 と初期関数 φ の組、 (t_0, φ) として与えられる。従って、初期値の空間、より一般的に云えば、相空間は、前者では有限次元の空間であるのに対して、後者では無限次元の空間である。常微分方程式の理論と差分微分方程式の理論の最大の相違は、相空間の次元が有限か無限かと云う違いに発している。後に2.2節で、この点に詳しく触れる。

(b) 解の安定性の定義

系(1.3)において、

$$f(t, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0, \quad t \in [0, \infty], \quad (1.4)$$

と仮定する。このとき、零解 $x(t) \equiv 0$ の安定性と漸近安定性は次のように定義される。なお、

下記における $|\cdot|$ は、ベクトルノルムを表わす。

定義：系(1.3)の零解 $x(t) \equiv 0$ が(Lyapunovの意味で)安定であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ と $t_0 \geq 0$ に対し、適当な $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ が存在して、 $\max_{t_0-L \leq t \leq t_0} |\varphi(t)| < \delta(t_0, \varepsilon)$ を満たす任意の初期関

数とすべての $t \geq t_0$ に対して、

$$|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon, \quad (1.5)$$

が成立することを云う。

定義：系(1.3)の零解 $x(t) \equiv 0$ が(Lyapunovの意味で)漸近安定であるとは、零解が安定であり、かつまた、1つの定数 $\delta_0(t_0) > 0$ が存在して、 $\max_{t_0-L \leq t \leq t_0} |\varphi(t)| < \delta_0(t_0)$ ならば、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t; t_0, \varphi)| = 0, \quad (1.6)$$

が成立することを云う。

初期値の与え方の違いを除けば、上記の両定義は、常微分方程式における定義と同じである。

第2章 むだ時間を含む非線形系に対する平均法

常微分方程式系に対する平均法が、既に1930年代に定式化されたのに対して、⁽²⁶⁾差分微分方程式系に対する平均法は、1966年、J. K. Hale によって初めて確立された。⁽¹⁰⁾ 本2章では、小パラメータ $\varepsilon(>0)$ を含む次式、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ux(t) + Vx(t-L) + \varepsilon f(t, x(t), x(t-L)), \\ \text{ここに、} L &: \text{正定数,} \\ x &: n \text{ ベクトル} \\ U, V &: n \times n \text{ 定数行列,} \\ f &: R \times R^n \times R^n \rightarrow R^n, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

を対象にして、Hale の定式化による、差分微分方程式系に対する平均法を説明する。ここに、 $f(t, x, y)$ は、 t に関して概周期的であり、 x と y に関して連続的微分可能であると仮定する。なお、本章では、差分微分方程式を DDE、常微分方程式を ODE と略称する。

2.1 準 備

ODE系とDDE系の、両者に対する平均法の類似点と相違点を明らかにするため、まず、ODE系に対する平均法に、簡単に触れる。

ODE系、

$$\dot{x}(t) = Ux(t) + \varepsilon f(t, x(t)); \varepsilon > 0, \quad (2.2)$$

に対する平均法は、次のように定式化される。

基底変換行列 P によって、行列 U を、

$$\left. \begin{aligned} P^{-1}UP &= \text{diag.}(U_1, U_2), \\ \text{ここに、} U_1 &: m \times m \text{ 行列, } \text{Re} \lambda(U_1) = 0, \\ U_2 &: (n-m) \times (n-m) \text{ 行列, } \text{Re} \lambda(U_2) \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

と分解する。ここに、 $\text{Re} \lambda(T)$ は、行列 T の固有値の実部を表わす。 U_1 は対角型、よって $e^{U_1 t}$ は概周期関数と仮定する。(2.3)式に対応する x と f の分解を、 $P^{-1}x = \text{col.}(u, v)$ と $P^{-1}f = \text{col.}(g, h)$ 、ここに、 u と $g \in R^m$ 、 v と $h \in R^{n-m}$ 、と表わせば、系(2.2)は次の系と同値である。

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}(t) &= U_1 u(t) + \varepsilon g(t, u(t), v(t)), \\ \dot{v}(t) &= U_2 v(t) + \varepsilon h(t, u(t), v(t)). \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

さらに, $u(t) \rightarrow e^{U_1 t} y(t)$, $v(t) \rightarrow z(t)$ と変数変換すれば, (2.4) 式は,

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= \varepsilon Y(t, y(t), z(t)), \\ \dot{z}(t) &= U_2 z(t) + \varepsilon Z(t, y(t), z(t)), \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

の形になる。系(2.5)の平均化方程式(averaged equation)を,

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= \varepsilon Y_0(y(t)), \\ \text{ここに, } Y_0(y) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(t, y, 0) dt, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

によって定義するとき, 次の定理がなりたつ。⁽¹¹⁾ この定理は, 平均化方程式(2.6)式の定数解と, 系(2.5)の概周期解との間の関係(概周期解が存在するための十分条件)を確立するものである。

定理 : もし $Y_0(y_0) = 0$ なる y_0 があり, かつ $\operatorname{Re} \lambda(\partial Y_0(y_0)/\partial y) \neq 0$ ならば, $\varepsilon_0 > 0$ と, それぞれ m 次元と $n - m$ 次元の概周期関数 $y^*(\varepsilon)$ と $z^*(\varepsilon)$ が存在して, $y^*(\varepsilon)$ と $z^*(\varepsilon)$ は $[0, \varepsilon_0]$ で(2.5)式を満たす。 $y^*(0) = y_0$, $z^*(0) = 0$ である。 $(y_0, 0)$ の近傍に, このような解は唯1個しかない。 $\operatorname{Re} \lambda(\partial Y_0(y_0)/\partial y) < 0$, かつ $\operatorname{Re} \lambda(U_2) < 0$ ならば, この概周期解は漸近安定, そうでなければ不安定である。

DDE系(2.1)に対する平均法の定式化は, その筋道自身は上述と同様であるけれども, 形式的にはかなり異なっている。この差異は, 1.3節でも触れたように, 相空間の次元が, ODEでは有限次元(R^n)であるのに対して, DDEでは無限次元(次節で述べるように $C([-L, 0], R^n)$)であると云う点に発している。

さて, 平均化方程式(2.6)式を得るまでの手順を見直してみると, 次の3点がポイントである。第1点は系(2.2)から系(2.4)への分解であり, 第2点は平均操作((2.6)式第2式), 第3点は平均操作の対象関数が $Y(t, y, 0)$ ($z = 0$ に注意)であることである。第1点の分解は, 系(2.2)の無振動系 $x(t) = Ux(t)$ の相空間 R^n を, 行列 U の実部が0なる固有値の固有空間とその補空間に直和分解し, 系(2.2)をそれぞれの部分空間へ射影したものが系(2.4)であると解釈される。第2点の平均操作は $Y(t, y, 0)$ の直流分を取り出す操作である。第3点の“ $z = 0$ ”は, 平均化方程式では補空間からの寄与が無視されることを意味する。

DDE系(2.1)の平均法においても, 上記第1点と同様な分解手順が必要である。このため

に必要な DDE の線形自律系における分解理論は次節で述べる。また、後に説明することではあるが、DDE の平均化方程式が ODE になる理由は、上記第 3 点と同様に補空間 (DDE の場合は無限次元) からの寄与が無視されることに由来する。

2.2 差分微分方程式の線形自律系における分解の理論⁽⁹⁾

(a) 差分微分方程式の線形自律系

(1) まず、二、三の記号を定義する。 R^n はノルム $|\cdot|$ をもつ n 次元ベクトル空間、 $C = C([-L, 0], R^n)$ は、区間 $[-L, 0]$ を R^n へ写す連続関数の空間とする。 $\phi \in C$ のノルムを $\|\phi\| = \sup_{-L \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$ で与える。連続関数 $x: [-L, \tau] \rightarrow R^n$; $\tau > 0$ があるとき、 $t \in [0, \tau]$ に対して、 C の要素 x_t を $x_t(\theta) = x(t + \theta)$; $-L \leq \theta \leq 0$ によって定義する。すなわち、 x_t は連続曲線 $x(t)$ の $[t-L, t]$ 間の“線分”に対応する。

(2) 数学的理論においては、DDE は R^n 上ではなく、関数空間 C 上で定義された方程式と解釈される。例えば、ODE の自律系に関する最も基本的な事実は、相空間の 1 点を通る解は唯 1 個存在すると云うことであるが、DDE の自律系においては、相空間を C と見ることによって初めて、この事実がなりたつ。このように、DDE の相空間を C と解釈することにより、ODE の多くの性質が DDE へ翻訳される。DDE 系に対する平均法も、この方向に沿う議論の 1 例である。

(3) 本 2.2 節では、DDE の線形自律系 (系 (2.1) の無摂動系)、

$$\dot{x}(t) = Ux(t) + Vx(t-L), \quad (2.7)$$

について考察する。任意の $\phi \in C$ に対して、系 (2.7) の初期値 $(0, \phi)$ をもつ解 $x(\phi)$ は、 $[0, \infty]$ で一意に存在する。系 (2.7) の解作用素 $T(t): C \rightarrow C$ を、

$$T(t)\phi = x_t(\phi) \quad ; \quad t \geq 0, \quad (2.8)$$

で定義する。 $T(t)$ は、 $T(t+\tau) = T(t)T(\tau)$; $t \geq 0, \tau \geq 0$ を満す有界線形作用素である。

(4) 系 (2.7) の特性根 λ は、

$$|\lambda I - U - Ve^{-\lambda L}| = 0, \quad (2.9)$$

で与えられる。(2.9) 式の根は、任意の右半面に、たかだか有限個しかなく、各根の多重度も有限である。根 λ の多重度を k とすれば、系 (2.7) は、 $x(t) = p(t)e^{\lambda t}$ の形の 1 次独立な解を k 個もつ。ここに、 $p(t)$ は R^n の要素を係数とする $k-1$ 次以下の多項式である。

これら k 個の関数の定義域を $[-L, 0]$ に制限することにより、 C の k 次元部分空間 P_λ の基

基底 Φ_λ を得る。 P_λ は $T(t)$ 不変である。すなわち、

$$T(t)\Phi_\lambda = \Phi_\lambda e^{\mathcal{Q}_\lambda t}; \Phi_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(0) e^{\mathcal{Q}_\lambda \theta}, \quad -L \leq \theta \leq 0, \quad (2.10)$$

がなりたつ。ここに、 \mathcal{Q}_λ は $\dot{\Phi}_\lambda(\theta) = \Phi_\lambda(\theta)\mathcal{Q}_\lambda$ によって決まる $k \times k$ 定数行列で、その固有値は λ のみである。

(5) $A = \{\lambda_i\}$ を、有限個の特性根の集合とすると、1 次独立な系 $\{P_{\lambda_i}\}$ によって張られる C の部分空間を P で表わす。もし $\phi \in P$ ならば、(4) と同様に、

$$x_t(\phi) = T(t)\phi = \Phi e^{\mathcal{Q}t} b; \phi = \Phi b \quad (2.11)$$

がなりたつ。ここに、 Φ は P の基底、 \mathcal{Q} は $\dot{\Phi}(\theta) = \Phi(\theta)\mathcal{Q}$ によって決まる定数行列である。(2.11) 式から判るように、部分空間 P 上では、系 (2.7) の解は ODE の線形自律系の解と同じように振舞う。具体的に云えば、 P に座標系 Φ を導入し、系 (2.7) の解の P 上での挙動を $\Phi y(t)$ で表わすとき、 $y(t)$ は ODE $\dot{y}(t) = \mathcal{Q}y(t)$ を満す。

(6) P の補空間 Q が存在して、 $C = P \oplus Q$ と直和分解される。言い換えれば、任意の $\phi \in C$ は、

$$\phi = \phi^P + \phi^Q; \phi^P \in P, \phi^Q \in Q, \quad (2.12)$$

と一意に表わすことができる。 Q も $T(t)$ 不変である。

(b) 随伴系による空間 C の分解

(1) R^{n*} は n 次元行ベクトル空間、 $C^* = C([0, L], R^{n*})$ とする。系 (2.7) の随伴系とそれに付随する内積を、それぞれ、

$$\dot{y}(t) = -y(t)U - y(t+L)V, \quad \text{ここに、} y \in R^{n*}, \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} (\phi, \phi) &= \phi(0)\phi(0) - \int_0^{-L} \phi(\theta+L)V\phi(\theta)d\theta, \\ \text{ここに、} \phi &\in C^*, \phi \in C, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

によって定義する。随伴系 (2.13) の解は、初期値 $(0, \phi)$; $\phi \in C^*$ が与えられれば、 $t \leq 0$ の方向へ積分することによって一意に定まる。系 (2.13) の特性方程式はやはり (2.9) 式で与えられ、その根 λ に対し、系 (2.13) は $e^{-\lambda t} p^*(t)$ の形の解をもつ。ここに $p^*(t)$ は、 R^{n*} の要素を係数とする多項式である。

(2) (2.12) 式で表わされる空間 C の分解は、随伴系 (2.13) と内積 (2.14) を用いて陽に特徴づけられる。すなわち、 A を前(a)項(5)と同じ有限個の特性根の集合とし、また、 A に関する C^* の部分空間 P^* を同様に構成して、その基底を Ψ とする。このとき、行列 $(\Psi, \Phi) = ((\phi_j, \phi_k))$ は非特異であり、従って、

$$(\Psi, \Phi) = I; I = \text{単位行列}, \quad (2.15)$$

と仮定しても一般性は失われない。この Ψ と Φ 、および内積(2.14)を用いて、空間 C の分解は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} C &= P \oplus Q, \text{ここに,} \\ P &= \{\phi \in C \mid \phi = \Phi b; b \text{は定数ベクトル}\}, \\ Q &= \{\phi \in C \mid (\Psi, \phi) = 0\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

あるいは,

$$\phi = \phi^P + \phi^Q, \text{ここに, } \phi^P = \Phi(\Psi, \phi), \phi^Q = \phi - \phi^P. \quad (2.17)$$

(c) 補空間における解の挙動

部分空間 P における系(2.7)の解の挙動は前(a)項(5)で述べたが、補空間 Q におけるその挙動に次のようである。

任意の実数 σ に対して、 A は $\{\text{Real}(\lambda) \geq \sigma \text{なる特性根}\}$ とし、この A によって、 C は(2.16)式あるいは(2.17)式のように分解されたとする。このとき、 $K > 0$ と $r > 0$ が存在して、

$$\|T(t)\phi^Q\| \leq K e^{(\sigma-r)t} \|\phi^Q\|, \quad (2.18)$$

がなりたつ。不等式(2.18)の意味するところは、例えば $\sigma = 0$ ならば、 $t \rightarrow \infty$ のとき $\|T(t)\phi^Q\| \rightarrow 0$ となることである。これは、時間が十分経過した後のDDE(2.7)の解は、有限個のODEの解の組で近似できることを示す。この事実は、DDEで記述される系の性質を考える上で重要である。

(d) 定数変化公式における分解

平均法の定式化にとっては、定数変化公式における分解が重要である。

非同次方程式、

$$\dot{x}(t) = Ux(t) + Vx(t-L) + f(t), \quad (2.19)$$

の初期値 $(0, \phi)$ をもつ解は、次式(定数変化公式)で与えられる。

$$x_t = T(t)\phi + \int_0^t T(t-s)I_0 f(s)ds. \quad (2.20)$$

ここに、 $T(t)$ は(2.8)式で定義される自律系(2.7)の解作用素、 $I_0(\theta); -L \leq \theta \leq 0$ は次式で与えられる。

$$I_0(\theta) = \begin{cases} 0 & \dots\dots\dots -L \leq \theta < 0, \\ I(n \times n \text{単位行列}) & \dots\dots\dots \theta = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

前(b)項(2)のように、 A によって空間 C は $C = P \oplus Q$ と分解されたとする。このとき(2.20)式で与えられる x_t の P と Q への射影は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} x_t^P &= T(t) \phi^P + \int_0^t T(t-s) I_0^P f(s) ds, \\ x_t^Q &= T(t) \phi^Q + \int_0^t T(t-s) I_0^Q f(s) ds, \\ \text{ここに, } I_0^P &= \Phi(\Psi, I_0) = \Phi\Psi(0), \quad I_0^Q = I_0 - \Phi\Psi(0), \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

で与えられる。 $x_t^P = \Phi y(t)$ と表わすとき、 $y(t)$ は次のODEを満たす。

$$\dot{y}(t) = \mathcal{Q}y(t) + \Psi(0)f(t). \quad (2.23)$$

定数変化公式を介した(2.19)式→(2.22)式と(2.23)式の分解が、前2.1.1節における(2.2)式→(2.4)式の分解に対応する。

2.3 差分微分方程式系に対する平均法⁽¹⁰⁾

前2.2節で述べた分解理論を踏まえて、DDE系(2.1)に対する平均法は、以下のように定式化される。 A_0 と A_1 を、

$$A_0 = \{\text{無摂動系(2.7)の } \text{Real}(\lambda) = 0 \text{ なる特性根}\},$$

$$A_1 = \{\text{同じく } \text{Real}(\lambda) > 0 \text{ なる特性根}\},$$

とする。それぞれについて部分空間 P_0 と P_1 を構成し、 C を $C = P_0 \oplus P_1 \oplus Q$ と分解する。随伴系(2.13)についても、 A_0 に関する部分空間 P_0^* を作り、 P_0 と P_0^* の基底をそれぞれ Φ と Ψ ; $\Psi, \Phi = I$ とする。また行列 \mathcal{Q} は $\dot{\Phi}(\theta) = \Phi(\theta)\mathcal{Q}$ によって定められるとする。前2.2節(d)で述べたように、 x_t の分解、

$$x_t = \Phi y(t) + x_t^{P_1} + x_t^Q, \quad (2.24)$$

に対応して、系(2.1)は、

$$\dot{y}(t) = \mathcal{Q}y(t) + \varepsilon \Psi(0)f(t, x_t(0), x_t(-L)), \quad (2.25a)$$

$$x_t^{P_1} = T(t) x_0^{P_1} + \varepsilon \int_0^t T(t-s) I_0^{P_1} f(s, x_s(0), x_s(-L)) ds, \quad (2.25b)$$

$$x_t^Q = T(t) x_0^Q + \varepsilon \int_0^t T(t-s) I_0^Q f(s, x_s(0), x_s(-L)) ds, \quad (2.25c)$$

と分解される。 $y(t) = e^{\mathcal{Q}t} z(t)$ なる変数変換を行えば、(2.25a)式は、

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \varepsilon e^{-\mathcal{Q}t} \Psi(0)f(t, \Phi(0)e^{\mathcal{Q}t} z(t) + x_t^{P_1}(0) + x_t^Q(0), \\ &\quad \Phi(-L)e^{\mathcal{Q}t} z(t) + x_t^{P_1}(-L) + x_t^Q(-L)), \end{aligned} \quad (2.25d)$$

になる。系 (2.25) の平均化方程式は次の“ODE”によって定義される。

$$\left. \begin{aligned} z(t) &= \varepsilon f_0(z(t)), \text{ここに,} \\ f_0(z) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\varrho t} \psi(0) f(t, \varphi(0) e^{\varrho t} z, \varphi(-L) e^{\varrho t} z) dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

DDE系における平均法の定理は、次のように述べられる。

定理 : もし $f_0(z_0) = 0$ なる z_0 があり、かつ $\operatorname{Re} \lambda(\partial f_0(z_0)/\partial z) \neq 0$ ならば、 $\varepsilon_0 > 0$ と概周期関数 $x^*(\varepsilon)$ が存在して、 $x^*(\varepsilon)$ は $[0, \varepsilon_0]$ で系 (2.1) を満す。 $x^*(0) = \varphi(0) e^{\varrho t} z_0$ である。この解は $\varphi e^{\varrho t} z_0$ の近傍に唯 1 個しかない。 A_1 が空で、 $\operatorname{Re} \lambda(\partial f_0(z_0)/\partial z) < 0$ ならば、この概周期解 $x^*(\varepsilon)$ は漸近安定、そうでなければ不安定である。

第 4 章と第 6 章では、以上に述べた平均法の定式化に従って、系 (1.1) (第 4 章) と系 (1.2) (第 6 章) の周期解および概周期解を求める。

第3章 むだ時間を含む線形周期系の安定問題^[1, 2, 3, 4]

3.1 緒 言

本章では、むだ時間を含む非線形振動系の定常応答の安定判別への応用を目的として、むだ時間を含む線形周期系の安定問題について考察する。

さて、系にむだ時間が含まれない場合については、今日まできわめて多数の研究報告がある。これらの報告を見ると、周期係数が微小な場合について、安定のための必要十分条件、すなわち安定限界を解析的に求めること（例えば(37)、以下第1の問題と呼ぶ）、周期係数が微小でない場合は安定限界を陽に得ることは困難なため、安定のための十分条件をLiapunovの方法などによって求めること（例えば(51)、第2の問題）、などに関心がもたれている。このような安定限界またはそれに代るものを陽に求めると言う問題のほかに、線形定係数系におけるNyquist判別法やMikhailov判別法⁽¹⁷⁾と同等な線形周期系の安定判別法を与えること、言い換えれば“パラメータ値が具体的に指定された線形周期系の安定性を判別するための一般的な手法”を与えること（第3の問題）が、より基本的な問題として考えられるけれども、この問題は興味の対象とはされていない。その系の特性乗数（特性指数）の値を知れば安定性は判るが、むだ時間を含まない系のたかだか有限個の特性乗数を、計算機を用いて数値的に求めることは容易だからである。⁽¹¹⁾

しかし、本3章で考察するような、“むだ時間を含む線形周期系”においては事情が異なる。これらの系では、相空間は無限次元であり、また、一般に可算個の特性乗数があるため、⁽⁴⁴⁾⁽⁴⁶⁾むだ時間を含む系における第3の問題には、上述と類似な解答は存在しない。従って、むだ時間が含まれる場合は、上記第1と第2の問題のみならず、この第3の問題も重要である。

非線形振動の安定判別への応用の観点からは、第1の問題の考察が必要である。また、第3の問題は、上述の如く、むだ時間を含む系に特有の問題である。そこで本章では、上記3種類の問題のうちから、第1と第3の問題を取り上げる。

さて、線形周期系の研究においては、いわゆるFloquetの定理⁽¹¹⁾が基本的な役割を果たす。むだ時間を含む系に対する上記定理の拡張は、A. Stokes⁽⁴⁶⁾とS. N. Shimanov⁽⁴⁴⁾によってなされた。しかしながら、上述の第1と第3の問題を具体的に考察した論文は少数である。筆者の知る限りでは、第1の問題に対して、Shimanovが小パラメータ法（摂動法）の適用を一般的に論じ、⁽⁴³⁾K. G. Valeevが、特性方程式から直接的に特性指数を求める方法を論じているだ

けである。⁽⁴⁹⁾⁽⁵⁰⁾一方、第3の問題に関する報告はまだないようである。

以下では、まず第3の問題に対して、一解答を与える。Nyquist判別法などと同種の、図式的な安定判別法である。第1の問題に対しては、連分数表示された特性方程式から、直接的に特性指数を求める方法を示す。連分数表示を用いる理由は、連分数の打ち切り次数と、特性指数の確度との間の関係が明白だからである。連分数表示の利用は、既にK. G. Valeevによっても試みられているけれども、⁽⁴⁹⁾打ち切り次数と、特性指数の確度との間の関係は述べられていない。さらに、むだ時間を含む線形周期系への一接近法として、同系を、むだ時間を含まない線形周期系（線形周期係数常微分方程式）へ変換する方法も示す。そして、これらの方法を用いて、2種類の具体的な系の、(1)安定領域図、(2)特性指数の軌跡図、ならびに(3)周期係数が微小な場合の特性指数、を与えることにより、むだ時間が線形周期系の安定性と特性指数の性質に及ぼす影響の一端を明らかにする。

3.2 むだ時間を含む線形周期系の一安定判別法

3.2.1 むだ時間を含む線形周期系の安定条件と漸近安定条件

本3.2節では、パラメータ値が既知の線形周期系、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= U(t)x(t) + V(t)x(t-L), \\ \text{ここに,} \\ L &: \text{正定数,} \\ x(t) &: m \text{ ベクトル関数,} \\ U(t), V(t) &: m \times m \text{ 周期行列 (周期 } \pi/\omega), \\ U(t) &= \sum_{k=-l}^l U_{2k} e^{j2k\omega t}; U_{-2k} = \overline{U_{2k}}, \\ V(t) &= \sum_{k=-l}^l V_{2k} e^{j2k\omega t}; V_{-2k} = \overline{V_{2k}}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

の零解 $x(t) \equiv 0$ 、あるいはスカラー系[†]、

$$\begin{aligned} P_0(d)x(t) + P_1(d)x(t-L) + f(t)[Q_0(d)x(t) + Q_1(d)x(t-L)] &= 0, \\ \text{ここに, } P_i(d) &= \sum_{k=0}^m p_{ik} d^k, \quad Q_i(d) = \sum_{k=0}^{m-1} q_{ik} d^k, \quad d^k = \frac{d^k}{dt^k}; \quad i = 0, 1, \\ p_{ik}, q_{ik} &: \text{実定数, } p_{0m} = 1, \quad p_{1m} = 0, \\ f(t) &= \sum_{k=-l}^l \theta_{2k} e^{j2k\omega t}; \quad \theta_{-2k} = \overline{\theta_{2k}}, \quad \theta_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

† 本節では、スカラー、ベクトルと行列に同じ文字を使うことがあるが、その都度、いずれであるかを説明する。

の零解 $x(t) \equiv 0$ が漸近安定であるか否か、を判別するための一方法について述べる。

系(3.1)と系(3.2)において、周期係数 $U(t)$, $V(t)$ と $f(t)$ は有限 Fourier 級数で展開できると仮定されている。 $f(t)$ に直流分がないと仮定しても一般性は失われない。また、系(3.1)と系(3.2)は長さ L のむだ時間を含むと仮定されているが、本 3.2 節の議論は、相異なる長さのむだ時間が含まれる場合へ容易に拡張される。系(3.2)は系(3.1)の形で変換できるから、以下ではより一般的な系(3.1)を対象にして、考察を進める。

さて系(3.1)の解に関して、A. Stokes⁽⁴⁶⁾と S. N. Shimanov⁽⁴⁴⁾は以下の事実を証明している。

1° 系(3.1)は一般に次式で表わされる Floquet 型の解をもつ。

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= e^{st} \left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} p_1(t) + \cdots + t p_{k-1}(t) + p_k(t) \right], \\ \text{ここに,} \\ s &: \text{特性指数,} \\ p_i(t) &; i = 1, 2, \dots, k : \text{周期関数 (周期 } \pi/\omega \text{).} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

特性指数 s の全体は一般に可算集合であるが、任意の実数 σ に対し、 $\text{Real}(s) \geq \sigma$ なる特性指数はたかだか有限個である[†]。

2° 系(3.1)の各解は漸近的な意味において Floquet 型の解の 1 次結合で表わされる。詳しく言えば、任意に大きな β に対して、上記の 1 次結合を適当に取れば、両者の差が $e^{-\beta t}$ 程度の速さで零に近づくようにできる。

3° 従って、零解 $x(t) \equiv 0$ の安定性は Floquet 型の解の挙動によって決まる。すなわち、系(3.1)の特性指数を s_i ; $i = 1, 2, 3, \dots$ で表わすとき、零解の安定条件と漸近安定条件は以下のようなものである。(i) 次の 2 条件(a)と(b)がなりたてば零解は安定である。条件(a) $\text{Real}(s_i) \leq 0$; $i = 1, 2, 3, \dots$ 。条件(b)もし $\text{Real}(s_i) = 0$ ならば、その特性指数 s_i に対する k ((3.3) 式参照) は 1 である。(ii) もし $\text{Real}(s_i) < 0$; $i = 1, 2, 3, \dots$ なら、零解は漸近安定である。

3° (ii) に述べたところから、系(3.1)の零解が漸近安定であるか否かの判別は、“系(3.1)の特性指数が虚軸を含む右半面上に存在するか否かを判別すること”と同値である。

3.2.2 特性方程式の誘導

以下では、系(3.1)の特性指数が満すべき方程式を、単に“系(3.1)の特性方程式”と呼ぶ。

さて系(3.1)の特性方程式を、いわゆる Hill の方法⁽⁵⁴⁾を応用することにより導こう。この

† 特性指数 s と $s + j2n\omega$; $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ は同一視する。

目的のためには、Floquet 型の解として $e^{st}p(t)$ の形のを考えておけば十分である。周期関数 $p(t)$ を Fourier 級数に展開すれば、この解は、

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= e^{st} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} e^{j2n\omega t}, \\ \text{ここに、} c_{2n} &: m \text{ 複素定数ベクトル,} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

と表わされる。一般に Floquet 型の解の滑らかさは周期係数の滑らかさに依存する。⁽¹²⁾系(3.1)の周期係数 $U(t)$ と $V(t)$ は任意回微分可能であるから、Floquet 型の解 (3.4) もやはり任意回微分可能である。従って、Fourier 級数の一般論から、⁽⁴⁵⁾ (3.4) 式右辺の Fourier 級数は絶対収束するのみならず、任意の正整数 k に対し正数 M が存在して、

$$\|c_{2n}\| \leq M/n^k; n \neq 0, \quad (3.5)$$

がなりたつ。

さて、(3.4) 式を (3.1) 式に代入し、 $e^{j2n\omega t}; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ の係数をそれぞれ零とおけば、

$$\left. \begin{aligned} &[(s+j2n\omega)I - U_0 - V_0 e^{-(s+j2n\omega)L}] c_{2n} \\ &+ \sum_{\substack{k=-l \\ k \neq 0}}^l [-U_{2k} - V_{2k} e^{-\{s+j(2n-2k)\omega\}L}] c_{2n-2k} = 0 \\ &; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ここに、} I: m \times m \text{ 単位行列,} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

を得る。ここで、後出の無限行列式 — (3.10) 式右辺 — の収束を議論するため、(3.6) 式中の $c_{2n}; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ をそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} c_{2n} &= G^{-1}(s+j2n\omega) c_{2n}^*, \\ \text{ここに、} G(s) &= [sI - U_0 - V_0 e^{-sL}], \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

によって $c_{2n}^*; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に変換すれば、同式は、

$$\left. \begin{aligned} &c_{2n}^* + \sum_{\substack{k=-l \\ k \neq 0}}^l H(2k, 2n-2k) c_{2n-2k}^* = 0, \\ \text{ここに、} H(2k, 2n) &= [-U_{2k} - V_{2k} e^{-(s+j2n\omega)L}] G^{-1}(s+j2n\omega) \\ &; k=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

となる。ただし、特性指数と $\det G(s+j2n\omega)$ の零点が一致して、 $G^{-1}(s+j2n\omega)$ が存在しないことも起こりうるが、この場合については、3.2.3 節(注意 3.1)で触れる。

さて、可算個の未知数 $c_{2n}^*; n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を含む同次線形連立方程式である (3.8) 式が、自明でない解をもつ条件⁽³⁹⁾から、系(3.1)の特性方程式、

$$F(s) = 0, \quad (3.9)$$

を得る。ここに、 $F(s)$ は次式右边、

$$F(s) = \det \begin{bmatrix} I & H(2, 2) & H(4, 0) & H(6, -2) & H(8, -4) \\ H(-2, 4) & I & H(2, 0) & H(4, -2) & H(6, -4) \\ H(-4, 4) & H(-2, 2) & I & H(2, -2) & H(4, -4) \\ H(-6, 4) & H(-4, 2) & H(-2, 0) & I & H(2, -4) \\ H(-8, 4) & H(-6, 2) & H(-4, 0) & H(-2, -2) & I \end{bmatrix}, \quad \dots\dots\dots (3,10)$$

で定義される無限行列式を表わす。この無限行列式の収束は付録 I で証明する。

さて、特性方程式 (3.9) 式が示すように、系 (3.1) の特性指数は“複素関数 $F(s)$ ”の零点に一致する。従って、3.2.1 節 3° (ii) に述べたところから、系 (3.1) の安定判別は、結局“複素関数 $F(s)$ の零点が虚軸を含む右半面に存在するか否かを判別すること”に帰着される。 $F(s)$ の零点の分布を如何にして調べるかは次節で述べることにして、以下ではそのための準備として、複素関数としての $F(s)$ の性質に触れる。

さて、複素関数としての $F(s)$ は以下の性質 1°~5°をもつ。なお、これらの性質の証明は付録 I を参照のこと。

1° $F(s)$ は有理型関数である。複素平面上の点集合 $\{P\}$ を、

$$\{s \mid s = s_0 \pm j2n\omega; \det G(s_0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots\dots\}, \quad (3,11)$$

で定義すれば、 $\{P\}$ の点は $F(s)$ の極であり、 $\{P\}$ の点以外では $F(s)$ は正則である。 $\{P\}$ の点 s_1 が $s_1 = s_0 + j2n\omega; \det G(s_0) = 0$ で与えられるとすれば、 s_1 における $F(s)$ の極の位数は、 s_0 における $\det G(s)$ の零点の位数に等しい。なお、 $\det G(s)$ の零点の全体は一般に可算集合であるけれども、任意の実数 σ に対し、実部が σ より大きい半平面上にはたかだか有限個しかないことに注意しよう。⁽¹⁾

2° 周期性： $F(s) = F(s + j2\omega)$ 。

3° 対称性： $F(\bar{s}) = \overline{F(s)}$ 。

4° 任意の実数 σ に対し、 $F(\sigma + jn\omega); n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots$ は実数である。ただし、 $\sigma + jn\omega \notin \{P\}$ とする。

5° $\text{Real}(s) \rightarrow +\infty$ のとき, $F(s) \rightarrow 1$ 。

スカラ系 (3.2) に対しても, 以上と同様に特性方程式が導ける。結果のみ記せば, $P(s)$, $Q(s)$, $H(s)$ と H_{2n} ; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ を, それぞれ,

$$\left. \begin{aligned} P(s) &= P_0(s) + P_1(s) e^{-sL}, \\ Q(s) &= Q_0(s) + Q_1(s) e^{-sL}, \\ H(s) &= Q(s) / P(s), \\ H_{2n} &= H(s + j2n\omega), \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

で定義するとき, (3.10) 式に対応して,

$$F(s) = \det \begin{bmatrix} 1 & \theta_2 H_2 & \theta_4 H_0 & \theta_6 H_{-2} & \theta_8 H_{-4} \\ \theta_{-2} H_4 & 1 & \theta_2 H_0 & \theta_4 H_{-2} & \theta_6 H_{-4} \\ \theta_{-4} H_4 & \theta_{-2} H_2 & 1 & \theta_2 H_{-2} & \theta_4 H_{-4} \\ \theta_{-6} H_4 & \theta_{-4} H_2 & \theta_{-2} H_0 & 1 & \theta_2 H_{-4} \\ \theta_{-8} H_4 & \theta_{-6} H_2 & \theta_{-4} H_0 & \theta_{-2} H_{-2} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

が得られる。そして, 点集合 $\{P\}$ の定義を, (3.11) の代りに,

$$\{s \mid s = s_0 \pm j2n\omega; P(s_0) = 0, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (3.14)$$

で置き換えれば, 上記の性質 1°~5°は (3.13) 式で定義される $F(s)$ に対しても, そのままなりたつ。

3.2.3 安定判別法

3.2.2 節で述べたように, 系 (3.1) の安定判別は, (3.10) 式で定義される $F(s)$ の零点が虚軸を含む右半面に存在するか否か, を判別することに帰着される。しかるに, 3.2.2 節で述べた $F(s)$ の性質 2° (周期性) によって, 図 3.1 に示される帯状領域 (以下, 図 3.1 帯状領域と言う),

$$\{s \mid \text{Real}(s) \geq 0, \omega \geq \text{Imag}(s) > -\omega\}, \quad (3.15)$$

に零点があるか否かを調べれば十分である。

この零点の検出は, Nyquist 判別法などと同じく, 関数論における偏角原理⁽⁵⁶⁾ を利用して行うのが適当であろう。従って, 安定判別の具体的な手順は次の 2 段階からなる。

まず、図 3.1 帯状領域中にある $F(s)$ の極の個数 (k 位の極は k 個と数える) を調べなければならない。 $F(s)$ の性質 1° として述べたように、 $F(s)$ の極は集合 $\{P\}$ の点に一致する。一方、 $\{P\}$ の点は $\det G(s)$ の零点を虚軸に平行に $\pm 2n\omega$; $n = 0, 1, 2, \dots$ だけ平行移動したものの全体からなるが、平行移動に際して、 $\det G(s)$ の右半面にある各零点は正確に 1 回だけ図 3.1 帯状領域を通過する。従って、図 3.1 帯状領域中の $F(s)$ の極の個数は、 $\det G(s)$

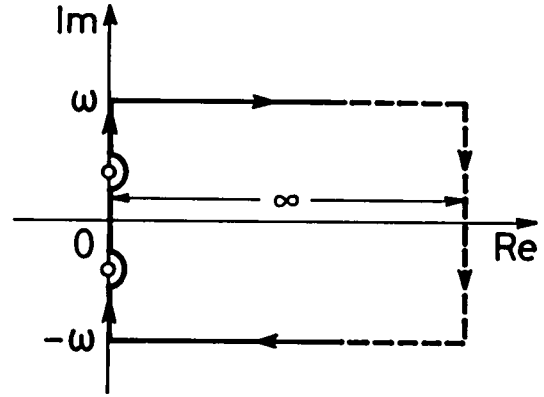


図 3.1 右半面上の帯状領域と Nyquist 径路。

の右半面にある零点の個数 (k 位の零点は k 個と数える) に等しい。この $\det G(s)$ の零点の個数は、やはり偏角原理に基づく Mikhailov の方法⁽¹⁷⁾ によって調べられる。なお、 $F(s)$ の性質 1° 末尾に述べたように、 $\det G(s)$ の右半面にある零点の個数はたかだか有限個である。

つぎに、図 3.1 帯状領域の境界線に対する $F(s)$ の軌跡 (Nyquist 軌跡) を描かねばならないが、 $F(s)$ の性質 2° によって上下境界線上における $\arg F(s)$ の変化は互いに相殺されること、ならびに $F(s)$ の性質 3° と 5° に基いて、

$$\{s \mid \text{Real}(s) = 0, \omega \geq \text{Imag}(s) \geq 0\}, \quad (3.16)$$

に対する軌跡を描けば十分である。集合 $\{P\}$ の点がこの区間上にあれば、勿論避けねばならない。

この軌跡の始点 ($s = 0$) と終点 ($s = j\omega$) は性質 4° によって実軸上にある。従って、軌跡が原点の囲りを反時計方向に $w/2$ 回 (w は整数) 回るとし、一方、 $\det G(s)$ の右半面にある零点の個数は n 個であるとすれば、 $w = n$ なら系 (3.1) は漸近安定であり、 $w \neq n$ なら不安定である。不安定の場合、図 3.1 帯状領域中に $n - w$ 個の特性指数がある。

(注意 3.1) (3.7) 式で定義される変換に関連して、特性指数と $\det G(s + j2n\omega)$ の零点が一致する場合も起りうることを述べた。これは、特性指数と集合 $\{P\}$ の点が一致する場合、あるいは $F(s)$ の零点と $F(s)$ の極が一致する場合と解釈される。しかしながら上に述べた安定判別の手順に従えば、たとえ右半面上でこのような場合が生じて、正しい結果が得られることは明らかであろう。

(注意 3.2) Nyquist 軌跡を描くためには、無限行列式 (3.10) を有限で打ち切って数値計算せねばならない。その際、打ち切り誤差が問題になるけれども、無限行列式の打ち切り誤差

を解析的に評価することは一般に難しい。ある特別な場合（むだ時間を含む Mathieu 方程式の場合）についての評価例は後に 3.3.2 節(b) 項で示す。打ち切り次数を決める 1 つの目安としては、 $F(s)$ の性質 4° に基いて、 $F(j\omega)$ の虚部の大きさに注目することが考えられる。

3.3 むだ時間を含む Mathieu 方程式の安定問題

3.3.1 むだ時間を含む Mathieu 方程式

線形周期係数常微分方程式のなかで、次式、

$$\ddot{x}(t) + (a + 2q \cos 2t)x(t) = 0, \quad (3.17)$$

で表わされる Mathieu 方程式は最も著名である。この方程式の解の性質と零解の安定性については詳細な研究が集積されており、⁽³²⁾ とくに、大域的なパラメータ領域における系 (3.17) の安定性を、周知の安定領域図（図 3.7a）によって容易に知ることができる。そこで、むだ時間を含む線形周期系の安定問題を考察するに当たって、まず系 (3.17) にむだ時間が含まれる場合、すなわち次式、

$$\ddot{x}(t) + ax(t) + 2q \cos 2t \cdot x(t-L) = 0, \quad (3.18)$$

で記述される系を取り上げ、系 (3.17) と系 (3.18) の比較検討を行なうのが適当であろう。以下では系 (3.18) を、むだ時間を含む Mathieu 方程式と呼ぶ。図 3.2 は系 (3.18) のブロック図である。なお、系 (3.18) で、 $ax(t)$ の項にむだ時間を入れなかったのは、 $q = 0$ において系 (3.18) が中立安定の状態にあるよう配慮したためである。

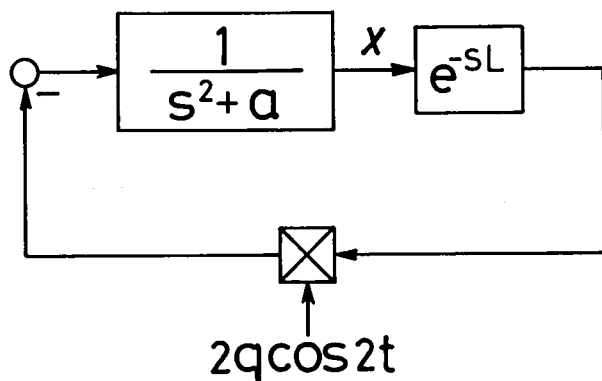


図 3.2 むだ時間を含む Mathieu 方程式のブロック図による表現。

3.3.2 特性方程式

(a) 特性方程式

系(3.18)に対して、(3.12)式で定義される諸量は、

$$\left. \begin{aligned} P(s) &= s^2 + a, \quad Q(s) = e^{-sL}, \\ H(s) &= \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{e^{-sL}}{s^2 + a}, \\ H_{2n} &= H(s + j2n) = \frac{e^{-(s+j2n)L}}{(s + j2n)^2 + a}, \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

で与えられる。周期係数のFourier係数は、 $\theta_{\pm 2} = q$, $\theta_{\pm 2k} = 0$; $k = 2, 3, 4, \dots$ である。これらを(3.13)式に代入することにより、系(3.18)の特性方程式として、

$$F(s) = \det \left[\begin{array}{cccccccc} \dots & qH_6 & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & qH_6 & qH_4 & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & qH_4 & qH_2 & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & qH_2 & qH_0 & & & \\ & & & & \textcircled{1} & & & \\ & & & & qH_0 & qH_{-2} & & \\ & & & & 1 & & qH_{-4} & \\ & & & & qH_{-2} & 1 & & \\ & & & & & qH_{-4} & qH_{-6} & \\ & & & & & & 1 & \dots \\ & & & & & & qH_{-6} & \dots \end{array} \right] = 0, \quad \dots \dots (3.20)$$

を得る。ただし①は、この要素が第0行第0列に位置することを示す。

(b) 無限行列式(3.20)の打ち切り誤差

本(b)項では、無限行列式(3.20)の値を d_∞ で表わし、これを次数 $(2N+1)$ で打ち切った行列式の値を d_{2N+1} で表わす。無限行列式(3.20)を次数 $(2N+1)$ で打ち切るとは、第0行第0列要素①を中心にして、大きさ $(2N+1) \times (2N+1)$ の行列式を切り出すことを意味する。打ち切り誤差は $|(d_{2N+1} - d_\infty)/d_\infty|$ として定義する。また本項では、 s は純虚数 $j\beta$; $1 \geq \beta \geq 0$ であると仮定する。3.2.3節の安定判別法を適用する際には、 $s = j\beta$; $1 \geq \beta \geq 0$ なる場合の打ち切り誤差が問題になるからである。

さて、結論から言えば、 N が十分大きくて、 $1/N$, a/N^2 ならびに打ち切り誤差 $|(d_{2N+1} - d_\infty)/d_\infty|$ 自身がともに1に比べて微小と見なせる場合には、打ち切り誤差は近似的に、

$$\left| \frac{d_{2N+1} - d_\infty}{d_\infty} \right| < \frac{\sqrt{2} q^2}{24N^3}, \quad (3.21)$$

で与えられる。もし $L = 0$ ならば、

$$\frac{d_{2N+1} - d_{\infty}}{d_{\infty}} = \frac{q^2}{24N^3}, \quad (3.22)$$

が近似的になりたつ。(3.21)式と(3.22)式の誘導は付録Ⅱで行なう。これら両式は粗い近似計算の結果であるけれども、後に数値例によって示すように、無限行列式(3.20)の収束の状況をよく反映している。

(3.21)式と(3.22)式から判るように、打ち切り誤差は q^2 に比例し、 N^3 に反比例する。従って打ち切り誤差を一定値以下に保つためには、 N は $q^{\frac{2}{3}}$ に比例して大きくしなければならない。例えば q の値が2倍になれば、打ち切り次数は $2^{\frac{2}{3}}$ 倍 $\doteq 1.6$ 倍だけ大きくしなければならない。

打ち切り誤差に関する一数値例を図3.3に示す。この図は、無限行列式(3.20)に含まれるパラメータ s, a, q と L のうち、 s, a と L の値は、

$$s = j, \quad a = 64, \quad L = 0,$$

に固定し、 q の値は1~80の間で数点を選んで作成したものである。横軸は打ち切り次数を表わし、縦軸は打ち切り誤差を示す。付録Ⅱに示す漸化式(Ⅱ.1)に従って、 $d_{2n+1}; n = 0, 1, 2,$

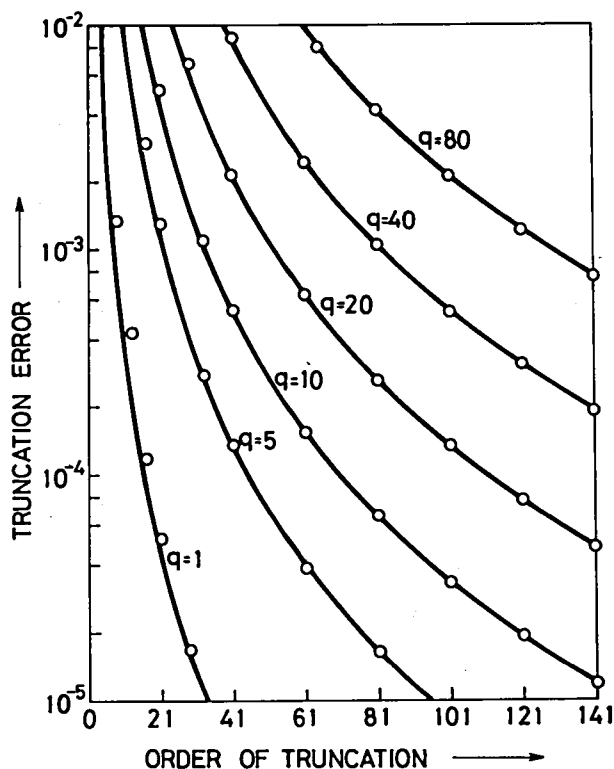


図3.3 無限行列式(3.20)の打ち切り誤差($s = j, a = 64, L = 0$)。

……を次々に計算し、 d_{501} を無限行列式の極限值と見なして、 $(d_{2n+1} - d_{501})/d_{501}$ の値をプロットしたものが図中の○印である。一方、実線は(3.22)式右辺の値をプロットしたものである。打ち切り次数が大なる範囲で、○印と実線はほぼ一致しており、(3.22)式の妥当性が判る。 s の値を上記 j 以外にも数点($s = 0.001j, 0.1j$ と $0.5j$)選んで調べてみたけれども、結果は図3.3に示したものとほぼ一致した。

3.3.4節で、系(3.18)の $a = 0 \sim 30, q = 0 \sim 20$ に対する安定領域図(図3.7)を示すが、この数値計算では、打ち切り次数を41とした。(3.21)式から、この際の打ち切り誤差はたかだか0.3%以下であることが判る。

3.3.3 微小な q に対する特性指数

本3.3.3節では、特性方程式の連分数表示(例えば(3.29)式)を利用して、微小な q に対する、系(3.18)の特性指数を陽に求める方法について述べる。

(a) 非共振の場合

本(a)項では、非共振の場合、すなわち、系(3.18)中のパラメータ a が、いわゆる共振条件 $|a - n^2| \leq O(q); n = 0, 1, 2, \dots$ のいずれをも満たさない場合について考察する。

さて、 q が微小ならば、系(3.18)の安定性は、 $j\sqrt{a}$ 近傍にある特性指数によって決まると考えられる。以下では、 q は十分小さいと仮定して、 $j\sqrt{a}$ 近傍にある特性指数を陽に求める。なお、この特性指数を、とくに“特性指数 s^* ”と呼んで他と区別する。

(1) 新たに、無限行列式 $D_{\pm 2n}(s); n = 1, 2, 3, \dots$ を、特性方程式、

$$F(s) = \det \left[\begin{array}{ccccccc} & & D_6 & & D_4 & & D_2 \\ & qH_6 & & & qH_4 & & qH_2 \\ \cdots & 1 & & & 1 & & 1 \\ & qH_6 & & & 1 & & qH_2 \\ & & qH_4 & & & 1 & \\ & & & qH_4 & & & qH_2 \\ & & & & qH_2 & & \\ & & & & & qH_0 & \\ & & & & & \textcircled{1} & \\ & & & & & qH_0 & \\ & & & & & & qH_{-2} \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & qH_{-4} \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & qH_{-6} \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & qH_{-6} \\ & & & & & & \cdots \end{array} \right] = 0, \quad \dots\dots (3.23)$$

中に記入した破線より左上、あるいは右下のすべての要素を含む無限行列式として定義する。これら $D_{\pm 2n}(s)$ の間に、公式、

$$\left. \begin{aligned} D_{\pm 2n}(s) &= D_{\pm(2n+2)}(s) - q^2 H_{\pm 2n} H_{\pm(2n+2)} D_{\pm(2n+4)}(s), \\ \text{ここに、複号同順； } n &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

がなりたつ。また、(3.23)式中辺の無限行列式を第0列に関して展開することにより、

$$F(s) = D_2(s)D_{-2}(s) - q^2 H_0 H_2 D_4(s)D_{-2}(s) - q^2 H_0 H_{-2} D_2(s)D_{-4}(s) = 0, \quad (3.25)$$

が得られる。

(2) まず、形式的に、 $D_{\pm 2n}(s)$ ； $n = 1, 2, 3, \dots$ はすべて非零であると仮定して、特性方程式の連分数表示を導こう。実際に、特性指数 s^* がこの仮定を満すことは、その後に証明する。以下、 $D_{\pm 2n}(s)$ を $D_{\pm 2n}$ と略記する。

さて、特性方程式の連分数表示は、(3.25)式を $D_2 D_{-2}$ で割り、その商、

$$\frac{F(s)}{D_2 D_{-2}} = 1 - \frac{q^2 H_0 H_2 D_4}{D_2} - \frac{q^2 H_0 H_{-2} D_{-4}}{D_{-2}} = 0, \quad (3.26)$$

を連分数展開することによって得られる。すなわち、公式(3.24)式と、仮定によって $D_{\pm 2n} \neq 0$ ； $n = 1, 2, 3, \dots$ なることから、(3.26)式中辺は以下のように展開される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{F(s)}{D_2 D_{-2}} &= 1 - \frac{q^2 H_0 H_2}{(D_2/D_4)} - \frac{q^2 H_0 H_{-2}}{(D_{-2}/D_{-4})} \\ &= 1 - \frac{q^2 H_0 H_2}{1 - \frac{q^2 H_2 H_4}{(D_4/D_6)}} - \frac{q^2 H_0 H_{-2}}{1 - \frac{q^2 H_{-2} H_{-4}}{(D_{-4}/D_{-6})}} \\ &= 1 - \frac{q^2 H_0 H_2}{1 - \frac{q^2 H_2 H_4}{1 - \frac{q^2 H_4 H_6}{\vdots}}} - \frac{q^2 H_0 H_{-2}}{1 - \frac{q^2 H_{-2} H_{-4}}{1 - \frac{q^2 H_{-4} H_{-6}}{\vdots}}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

(3.27)式中の最後の等式が、所望の特性方程式の連分数表示である。

さて、 $D_{\pm 2n}(s^*) \neq 0$ ； $n = 1, 2, 3, \dots$ なることを示そう。その理由は、 q が微小量ならば、これら無限行列式のすべての非対角要素 $qH_{\pm 2k}(s^*)$ ； $k \neq 0$ も微小量だからである。実際、 s^* を $s^* = j\sqrt{a} + \Delta$ ($|\Delta| \leq O(q)$)として、これを $qH_{\pm 2k}(s)$ に代入すれば、

$$\begin{aligned}
 qH_{\pm 2k}(s^*) &= \frac{q e^{-(j\sqrt{a}+L \pm j2k)L}}{(j\sqrt{a}+L \pm j2k)^2 + a} \\
 &= \frac{q e^{-(j\sqrt{a}+L \pm j2k)L}}{-4k(k \pm \sqrt{a}) + j2L(\sqrt{a} \pm 2k) + L^2},
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

が得られるが、最後の項の分母に注目すれば判るように、 a が非共振条件を満たす場合は、 $|qH_{\pm 2k}(s^*)| = O(q)$; $k \neq 0$ である。

(3.27) 式を変形して、

$$\begin{aligned}
 s^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s+j)L}}{(s+j2)^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s+j3)L}}{(s+j4)^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s+j5)L}}{\ddots}}} \\
 - \frac{q^2 e^{-2(s-j)L}}{(s-j2)^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s-j3)L}}{(s-j4)^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s-j5)L}}{\ddots}}} \\
 = 0,
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

の形にすれば、連分数の打ち切り次数と特性指数の確度との間の関係が明白になる。すなわち、本項では、 a が非共振条件を満たし、かつ $|s - j\sqrt{a}| \leq O(q)$ の場合を考察しているのであるから、(3.29) 式左辺の連分数中のすべての部分商[†]は $O(q^2)$ の量と考えて差支えない((3.28) 式参照)。そうすると、2 個の連分数をそれぞれ第 n 次近似分数[†] で近似する際の誤差は、 $O(q^{2n+2})$ の量であるから、結局、これらの連分数を第 n 次近似分数で置き換えた特性方程式から、確度 $O(q^{2n+1})$ で特性指数 s^* が求まる。

以上の、打ち切り次数と特性指数 s^* の確度との間の関係は、行列式形式では、図 3 4 のよう

† 連分数を、

$$\begin{aligned}
 &b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}}
 \end{aligned}$$

と表わすとき、 a_p/b_p を p 次部分商、

n 次部分商で打ち切った

$$\begin{aligned}
 &b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_n}{b_n}}}
 \end{aligned}$$

を、連分数の第 n 次近似分数と云う。⁽⁵²⁾

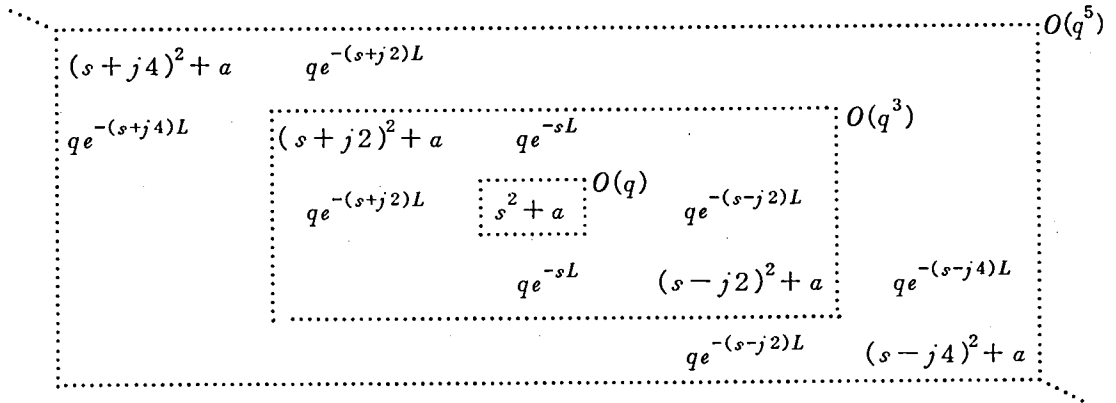


図 3.4 打ち切り次数と特性指数の精度との関係 (非共振の場合)

に表現される。すなわち、行列式の次数を 2 増すごとに 6 個の新しい要素が付け加わるが、これら 6 個の要素の組は、順にそれぞれ連分数の 1 次部分商, 2 次部分商, ……に対応する。従って、要素 $s^2 + a$ を中心とする 1×1 , 3×3 , 5×5 , ……の行列式を用いることにより、それぞれ $O(q)$, $O(q^3)$, $O(q^5)$, ……の精度で特性指数 s^* が決定できる。

(2) (3.29) 式左辺の 2 個の連分数を、ともに第 1 次近似分数で近似する際の誤差は $O(q^4)$ である。従って、次式、

$$s^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s+j)L}}{(s+j2)^2 + a} - \frac{q^2 e^{-2(s-j)L}}{(s-j2)^2 + a} = 0, \quad (3.30)$$

から、 $O(q^3)$ の精度で特性指数 s^* を決定できる。結果は次のとおりである。

$$\begin{aligned} s^* &= j\sqrt{a} - j \frac{q^2}{4\sqrt{a}(a-1)} [\sqrt{a} \sin(2\sqrt{a}L) \sin 2L + \cos(2\sqrt{a}L) \cos 2L] \\ &\quad + \frac{q^2}{4\sqrt{a}(a-1)} [\sqrt{a} \cos(2\sqrt{a}L) \sin 2L - \sin(2\sqrt{a}L) \cos 2L] \\ &\quad + O(q^4). \end{aligned} \quad (3.31)$$

(3.31) 式は、むだ時間の有無によって、系の性質が変わることを意味する。すなわち、 $L=0$ ならば、特性指数 s^* は純虚数であるけれども、 $L \neq 0$ ならば、 s^* の実部は一般に非零である。従って、 $|q| \ll 1$ かつ非共振の場合、系 (3.17) ($L=0$) が安定性に関して、言わば中立の状態にあるのに対して、系 (3.18) ($L \neq 0$) は、漸近安定か不安定かのいずれかの状態にある。

$L = \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ と π の各場合について、 a の値と s^* の実部の符号との関係を描いたものが図 3.5 である。太線と細線は、それぞれ s^* の実部が正、あるいは負であることを示す。従って、系 (3.18) は太線の部分で不安定、細線の部分で漸近安定である。

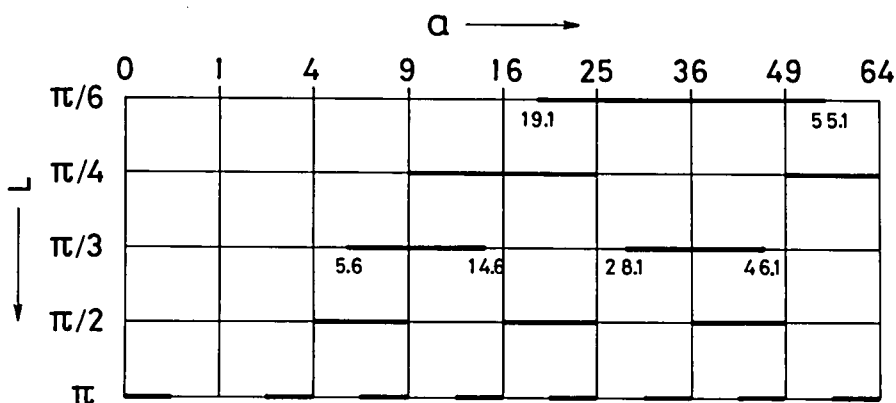


図 3.5 非共振領域における系 (3.18) の安定性 (ただし, $|q| \ll 1$)。太線は, 系 (3.18) が不安定であることを表わす。

(b) $|a-1| \leq O(q)$ の場合

(1) 本(b)項においては, 対称性が明白に現われるよう, 特性方程式 (3.20) 式中の変数 s を j だけずらせて,

$$F(s) = \det \begin{bmatrix} qH_5 & 1 & qH_3 & qH_1 & qH_{-1} & qH_{-3} & qH_{-5} \\ qH_5 & 1 & qH_3 & qH_1 & qH_{-1} & qH_{-3} & qH_{-5} \\ qH_3 & 1 & qH_1 & qH_{-1} & qH_{-3} & qH_{-5} & 1 \\ qH_1 & 1 & qH_{-1} & qH_{-3} & qH_{-5} & 1 & qH_{-5} \\ qH_{-1} & 1 & qH_{-3} & qH_{-5} & 1 & qH_{-5} & 1 \\ qH_{-3} & 1 & qH_{-5} & 1 & qH_{-5} & 1 & qH_{-5} \\ qH_{-5} & 1 & qH_{-5} & 1 & qH_{-5} & 1 & qH_{-5} \end{bmatrix} = 0,$$

$$\text{ここに, } H_{\pm(2n-1)} = \frac{e^{-(s \pm j(2n-1))L}}{[s \pm j(2n-1)]^2 + a}; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.32)$$

の形にしておくのが便利である。従って, 本(b)項の問題は, $|q| \ll 1$ なる場合について, (3.32) 式の原点付近 ($|s| \leq O(q)$)にある根を陽に求めることである。本項でも, この根をやはり“特性指数 s^* ”と呼んで他と区別する。

さて, 特性方程式 (3.32) 式を出発点にして, 前(a)項と同様な手順を繰り返すことにより, (3.32) 式に等価な連分数表示,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} (s+j)^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s+j^2)L}}{(s+j^3)^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s+j^4)L}}{(s+j^5)^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s+j^6)L}}{\dots}} \end{array} \right] \\ \times & \left[\begin{array}{c} (s-j)^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s-j^2)L}}{(s-j^3)^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s-j^4)L}}{(s-j^5)^2 + a - \frac{q^2 e^{-2(s-j^6)L}}{\dots}} \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$-q^2 e^{-2sL} = 0,$$

(3.33)

が得られる。(3.33)式においても、連分数の打ち切り次数と特性指数 s^* の確度との間の関係は明白である。すなわち、 $|a-1| \leq O(q)$ かつ $|s| \leq O(q)$ ならば、(3.33)式中の連分数を第 n 次近似分数で近似するときの誤差は、明らかに $O(q^{2n+2})$ の量である。従って、連分数を第 n 次近似分数で置き換えた特性方程式から、確度 $O(q^{2n+1})$ で特性指数 s^* を求めることができる。

以上の結果を、行列式表示に翻訳すれば、図 3.6 のようになる。すなわち、図中の 2×2 , 4×4 , ……の行列式を用いることにより、それぞれ確度 $O(q)$, $O(q^3)$, ……で特性指数 s^* が求められる。

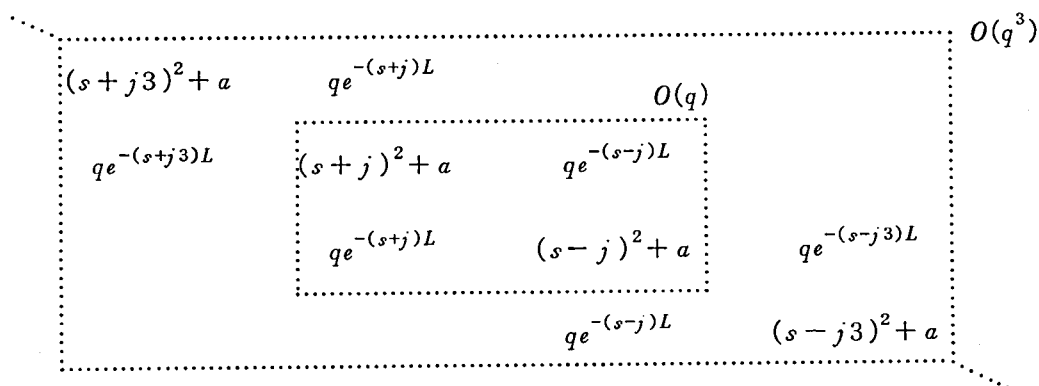


図 3.6 打ち切り次数と特性指数の確度との間の関係
($|a-1| \leq O(q)$ の場合)

(2) まず, (3.33)式[]内のそれぞれ第2項を無視することにより, 言い換えれば, 図3.6における 2×2 の行列式を用いることにより, 特性指数 s^* を確度 $O(q)$ で求めよう。

$$\left. \begin{aligned} [(s+j)^2 + 1 + \delta][(s-j)^2 + 1 + \delta] - q^2 e^{-2sL} &= 0, \\ \text{ここに, } \delta &= a - 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

を, s と δ がともに $O(q)$ の量であることに注意しつつ解けば,

$$s^* = \pm \frac{\sqrt{q^2 - \delta^2}}{2} + O(q^2), \quad (3.35)$$

を得る。(3.35)式右辺が, むだ時間 L を含まないことに注意しよう。同式から, 扇形領域 $|\delta| < q$ において, 系(3.18)は不安定であることが判る。しかし, この扇形領域の外部における安定性は, さらに高次の項を求めないと判らない。

前述のように, (3.33)式中の連分数を, それぞれ第1次近似分数で近似することにより, $O(q^3)$ の確度で特性指数 s^* が求まる。しかし, ここでは簡単のため, $O(q^2)$ の確度までにとどめよう。(3.33)式[]内の $O(q^3)$ を無視すれば, 同式は,

$$(j2s + \delta + s^2 + \frac{q^2 e^{-j4L}}{8})(-j2s + \delta + s^2 + \frac{q^2 e^{j4L}}{8}) - q^2 e^{-2sL} = 0, \quad (3.36)$$

となり, (3.36)式を展開して, 不必要な $O(q^4)$ の量を無視すれば,

$$(4 + 2\delta)s^2 + 2q^2(L - \frac{1}{4}\sin 4L)s + \delta^2 - q^2 + \frac{\delta q^2}{4}\cos 4L = 0, \quad (3.37)$$

が得られる。結局, (3.37)式から, 確度 $O(q^2)$ で特性指数 s^* が求まる。

さて, $(L - (1/4)\sin 4L) \geq 0$ であるから, (3.37)式から系(3.18)の安定性は,

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 - q^2 + \frac{\delta q^2}{4}\cos 4L &> 0 \text{ のとき, 漸近安定,} \\ \delta^2 - q^2 + \frac{\delta q^2}{4}\cos 4L &< 0 \text{ のとき, 不安定,} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

であることが判る。安定限界は,

$$\delta = \pm q - \frac{q^2}{8}\cos 4L + O(q^3), \quad (3.39)$$

で与えられる。(3.39)式において $L = 0$ とすれば, Mathieu 方程式(3.17)式の周知の安定限界, $\delta = \pm q - q^2/8 + O(q^3)$ が得られることに注意しよう。

従って, 結論を簡単に云えば, 系(3.18)は $|a-1| < q$ なる領域で不安定, $|a-1| > q$ なる

領域で漸近安定である。この結論がむだ時間 L の長さに依存しないことは興味深い。

(c) $|a - 4| \leq O(q)$ の場合

本(c)項では、 $|a - 4| \leq O(q)$ の場合について、原点近傍にある特性指数を陽に求める。(a)項および(b)項と同様な検討によって、次の結論が導かれる。すなわち、所望の特性指数は、 $(s \pm j2)^2 + a = 0$ から $O(q)$ の確度で求められる。また図 3.4 における 5×5 の行列式を用いれば、 $O(q^3)$ の確度で求められる、などである。簡単のため、本項では、 $O(q^2)$ の確度で上記特性指数を求めよう。

結果のみ云えば、

$$(16 + 2\delta)s^2 + \frac{8}{3}q^2 s \sin^3 2L + \delta^2 + \frac{\delta q^2}{6}(\cos 6L - 3 \cos 2L) - \frac{q^4}{144}(6 \cos 4L - 1) = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ここに, } \delta = a - 4, \\ \dots\dots\dots (3.40) \end{array} \right.$$

を解けば、所望の特性指数は $O(q^2)$ の確度で求められる。(3.40)式から判るように、系(3.18)は次の2個の条件、

$$\left. \begin{array}{l} \sin 2L > 0 \quad \text{あるいは} \quad (n + \frac{1}{2})\pi > L > n\pi, \\ ; n = 0, 1, 2, \dots, \end{array} \right\} \quad (3.41)$$

および、

$$\delta^2 + \frac{\delta q^2}{6}(\cos 6L - 3 \cos 2L) - \frac{q^4}{144}(6 \cos 4L - 1) > 0, \quad (3.42)$$

がともに満されるとき、漸近安定、そうでなければ、不安定である。(3.42)式において $L = 0$ とすれば、Mathieu 方程式の周知の安定条件、

$$(\delta + \frac{q^2}{12})(\delta - \frac{5q^2}{12}) > 0, \quad (3.43)$$

が得られる。

条件(3.41)式と(3.42)式は、 $a = 4$ 付近における系(3.18)の安定性が、むだ時間 L の長さに応じて変化することを示している。例えば、第1の条件が満されない、 $L = \pi/2 \sim \pi$ 、 $3\pi/2 \sim 2\pi$ 、……などでは、この付近は不安定領域のなかにある。また、例えば、 $L = \pi/6$ 、 $\pi/4$ と $\pi/3$ などでは、第1の条件は満されるが、第2の条件はそれぞれ、

$$L = \frac{\pi}{6} \quad \dots\dots\dots (\delta - \frac{q^2}{12})(\delta - \frac{q^2}{3}) > 0, \quad (3.44)$$

$$L = \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots \delta^2 + \frac{7q^2}{144} > 0, \quad (3.45)$$

$$L = \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots \left(\delta + \frac{q^2}{12}\right) \left(\delta + \frac{q^2}{3}\right) > 0, \quad (3.46)$$

となる。不等式(3.45)式は、この付近が漸近安定領域のなかにあることを示している。また、(3.43)式、(3.44)式と(3.46)式の各不等式は、いわゆる第2次不安定領域が現われる場合でも、その形状はむだ時間の長さに応じて変化することを示している。以上の様子は、後に示す安定領域図図3.7(a)($L=0$)、図3.7(d)($L=\pi/6$)、図3.7(e)($L=\pi/4$)と図3.7(f)($L=\pi/3$)などを見れば、明白であろう。

(d) $|a - n^2| \leq O(q)$; $n = 3, 4, 5, \dots\dots$ の場合

表題の場合についても、(a)項～(c)項と同様に解析できる。 $O(q^2)$ の確度までの結果は、既に(a)項(非共振の場合)で得た(3.31)式に一致する。ただし、同式右辺の誤差評価の項は、ここでは $O(q^3)$ に修正されねばならない。

例えば、 $n = 3$ ならば、(3.31)式は、

$$s^* = \frac{q^2}{48} \sin 4L (\cos 4L - 1) \pm j \left[\sqrt{a} + \frac{q^2}{96} (\cos 8L - 2 \cos 4L) \right] + O(q^3), \quad \dots\dots\dots (3.47)$$

となる。従って、 $|a - 9| \leq O(q)$ なる領域では、系(3.18)は、 $\sin 4L$ が正なら漸近安定、負なら不安定である。

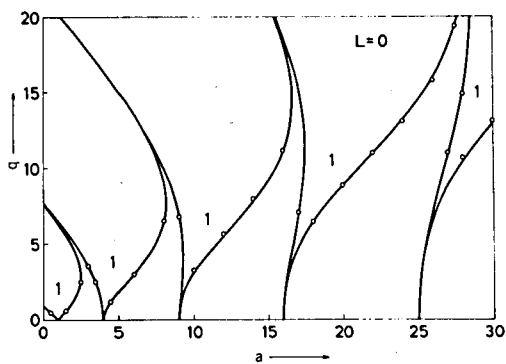
3.3.4 安定領域図

本3.3.4節では、3.2節に述べた安定判別法を応用して、系(3.18)の安定領域図を作成した結果について述べる。

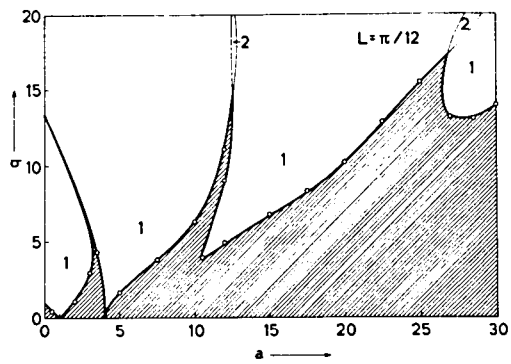
図3.7は系(3.18)の安定領域図を、むだ時間 L をパラメータとして描いたものである。図中の太線と細線は、図3.1帯状領域にある特性指数の個数が変化する境界を示す。これらの曲線は、ディジタル計算機に、3.2.3節で述べた安定判別法の手順を繰り返し行わせることにより得たものである[†]。この際、 q の最大値が20であることに鑑みて、無限行列式(3.20)の打ち切り次数は41とした。(3.21)式によれば、この際の打ち切り誤差はたかだか0.3%以下である。

さて、図中の太線は安定限界を表わす。これらの曲線と横軸で囲まれる領域で、系(3.17)($L=0$)は安定であり、系(3.18)($L \neq 0$)は漸近安定である。漸近安定領域は斜線で示した。

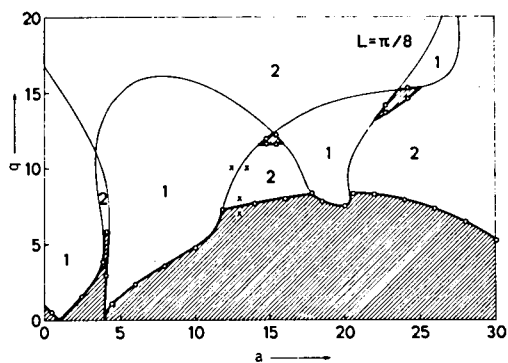
[†] 京大・大型計算センタのM190を使用した。1図の作成に要した計算時間は2分～4分である。



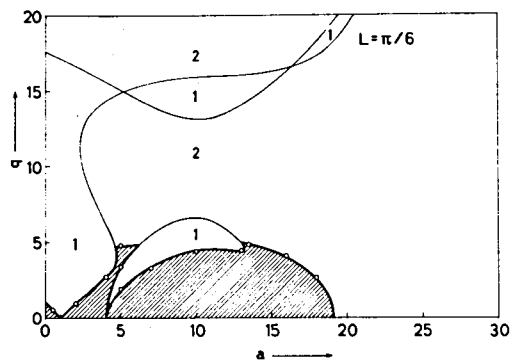
(a) $L = 0$



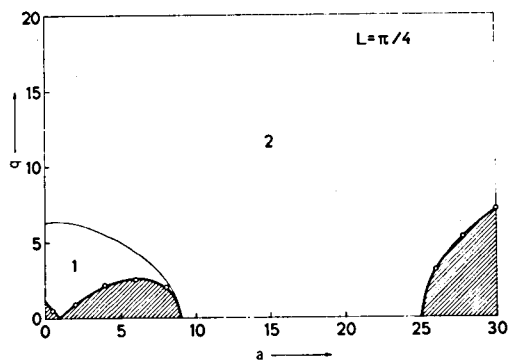
(b) $L = \pi/12$



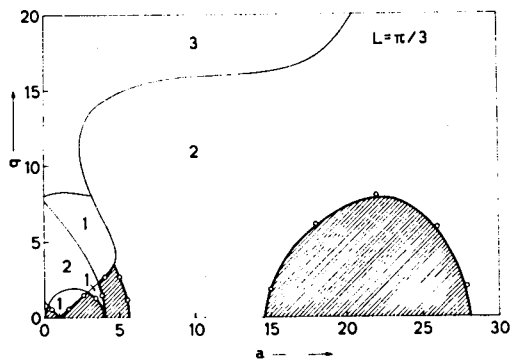
(c) $L = \pi/8$



(d) $L = \pi/6$

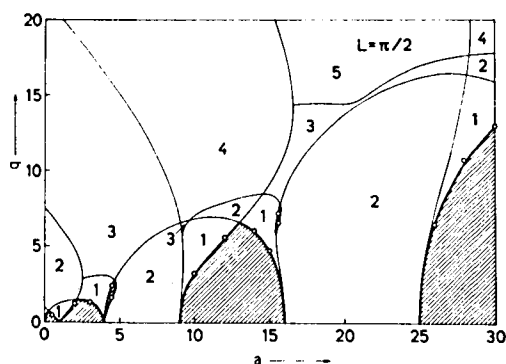


(e) $L = \pi/4$

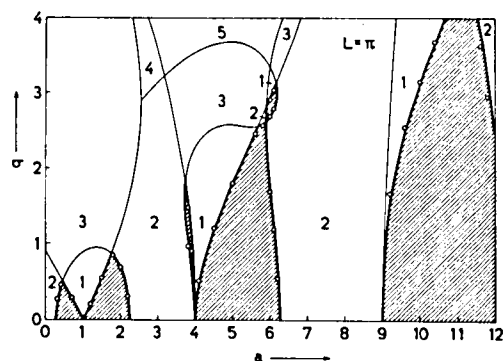


(f) $L = \pi/3$

図 3.7 むだ時間を含む Mathieu 方程式の安定領域図。漸近安定領域を斜線で示す。図中の数字は、図 3.1 の帯状領域中にある特性指数の個数を表わす。



(g) $L = \pi/2$

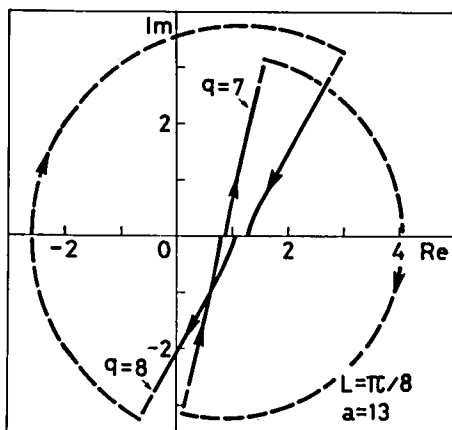


(h) $L = \pi$

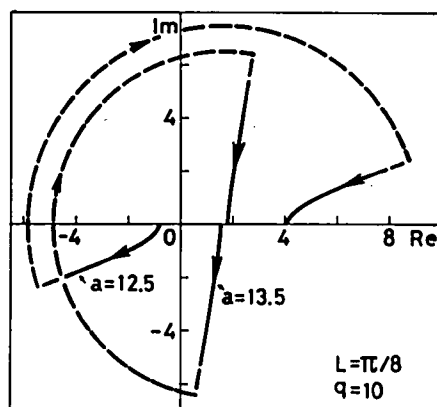
図 3.7 (続き)

不安定領域中の数字は、図 3.1 帯状領域中にある特性指数の個数を表わす。○印は、ハイブリッド・シミュレーションによって得た安定限界を示す[†]。実験値(○印)と計算値(太線)はよく一致しており、3.2 節で示した安定判別法の妥当性が判る。図 3.8 は Nyquist 軌跡の一例である。パラメータ値を図 3.7 (c) 中に×印で示した。

図 3.7 各図の比較で判るように、むだ時間は系(3.18)の安定性に著しい影響を及ぼす。た



(a) $L = \pi/8, a = 13, q = 7, 8$



(b) $L = \pi/8, a = 12.5, 13.5, q = 10$

図 3.8 Nyquist 軌跡。

[†] 付録 III(a)に、系(3.18)のハイブリッド・シミュレータ構成図を示す。

だ、例外は $a = 1$, $q = 0$ の近傍で、3.3.3 節(b)項でも示したように、むだ時間の有無に拘わらず、安定限界の形状は殆んど変らない。 q が微小な領域(横軸近傍)の安定性は3.3.3 節での検討結果に一致する。

図 3.7 を作成する際のデータを検討すると、むだ時間は特性指数の性質にも大きい影響を与えることが判る。そこで次に、むだ時間の有無によって、特性指数の性質が如何に変化するかを示そう。ただし、以下の記述では、特性指数の実部あるいは虚部と言うべきところを、それぞれ $\text{Real}(s)$, $\text{Imag}(s)$ と云う。また特性指数 s と $s \pm j2n$; $n = 1, 2, 3, \dots$ は同一視できるから、 $-1 < \text{Imag}(s) \leq 1$ なる特性指数のみに注目する。

まず、むだ時間が含まれない場合(系(3.17))は、

1° 特性指数の個数は 2 個である。

2° 安定領域において、 $\text{Real}(s)$ はともに零である。従って、系(3.17) は単に安定であって、漸近安定ではない。

3° 不安定領域において、 $\text{Imag}(s)$ はともに 1, または、ともに 0 のいずれかである。一方の $\text{Real}(s)$ は正, 他方の $\text{Real}(s)$ は負である。

4° 安定限界において、周期 π ($\text{Imag}(s) = 0$), または周期 2π ($\text{Imag}(s) = 1$) の周期解が現われる。

これに対し、むだ時間が含まれる場合(系(3.18))は、

5° 可算個の特性指数がある。

6° 安定領域において、 $\text{Real}(s)$ は負である。従って、系(3.18) は漸近安定である。

7° 不安定領域において、不安定解($\text{Real}(s)$ が正の Floquet 型の解)の $\text{Imag}(s)$ は、必ずしも 0 か 1 とは限らない。 $\text{Real}(s)$ が正の特性指数が一般に複数個存在する。

8° 安定限界において、中立解($\text{Real}(s)$ が零の Floquet 型の解)の $\text{Imag}(s)$ は必ずしも 0 と 1 ばかりでなく、系のパラメータに応じて、 $[-1, 1]$ の間のいずれの値でもとりうる。

以上のように、むだ時間の存在は特性指数の性質を大きく変えてしまう。後に 3.4.4 節において、むだ時間を含む Hill-Meissner 方程式の特性指数の軌跡図(図 3.10)を与えるが、これらの軌跡図を参考にすれば、上記 1°~8° に述べた事柄は一層よく理解できるものと思われる。

最後に、安定限界曲線について付言する。系(3.17) ($L = 0$) の安定限界は 4° に示した周期解の存在条件から決定でき、安定限界曲線の方程式を陽に書くこともできる。⁽³²⁾ しかし、8° から判るように、系(3.18) ($L \neq 0$) の安定限界を、方程式で陽に表わすことは難しい。

3.4 むだ時間を含む Hill-Meissner 方程式の安定問題

3.4.1 むだ時間を含む Hill-Meissner 方程式

本 3.4 節では、むだ時間を含む Hill-Meissner 方程式、

$$\ddot{x}(t) + ax(t) = 2q \operatorname{sgn}(\sin 2t) \cdot x(t-L), \quad (3.48)$$

の特性方程式が、 $L = (N/2)\pi$; $N = 0, 1, 2, \dots$ に対しては、閉じた形で書けることを利用して((3.69)式)、 q の変化に対する特性指数の軌跡図を与える。既に 3.3.4 節において、特性指数の性質がむだ時間の有無によって変化することを定性的に述べたが、これらの変化は、本節で与える軌跡図によって、一層明白に理解されるものと思われる。

系(3.48)(ただし、 $L = (N/2)\pi$; $N = 0, 1, 2, \dots$)の特性方程式が閉じた形で導ける理由は、

1° 一般にむだ時間が係数の周期の有理数倍なら、むだ時間を含む線形周期系と同じ特性指数をもつ線形周期係数“常”微分方程式系が存在すること、

2° とくに $L = (N/2)\pi$; $N = 0, 1, 2, \dots$ ならば、系(3.48)に等価な常微分方程式は、複素係数の Hill-Meissner 方程式((3.66)式)になること、

3° Hill-Meissner 方程式の特性方程式は閉じた形で求められること、
に基いている。

3.4.2 むだ時間を含む線形周期系の常微分方程式系への変換

系(3.48)を一般化した、むだ時間を含むスカラー線形周期系、

$$Hx(t) = f(t)x(t-L),$$

ここに、

$$H: \text{定係数線形常微分作用系}, \quad (3.49)$$

$$f(t): \text{区分的に連続な周期関数(周期 } \pi),$$

$$L: \text{正定数},$$

を考える。もし、むだ時間が係数の周期の有理数倍なら、すなわち、 $L = (N/M)\pi$ (M と N は正整数で既約とする)ならば、1 個の線形周期係数常微分方程式の連立系が存在して、系(3.49)が特性指数 s をもつことと、その常微分方程式系が特性指数 s をもつことは同値であることを示す。特性指数 s をもつとは、Floquet 型の解 $x(t) = e^{st}p(t)$; $p(t+\pi) = p(t)$ が存在することを意味する。以下では、この型の解のみを考える。

(a) $L = N\pi$ の場合

$L = N\pi$ とする。 $x(t) = e^{st}p(t)$ を系 (3.49) の解とする。 $p(t)$ の周期性によって、

$$x(t-L) = e^{s(t-N\pi)}p(t-N\pi) = e^{-sL}x(t), \quad (3.50)$$

がなりたつから、この解は次の常微分方程式、

$$Hx(t) = e^{-sL}f(t)x(t), \quad (3.51)$$

を満す。逆に、系 (3.51) が同式中のパラメータ s に等しい特性指数の解、 $x(t) = e^{st}p(t)$ をもつとすれば、この解は、

$$Hx(t) = f(t)e^{s(t-L)}p(t-L) = f(t)x(t-L), \quad (3.52)$$

によって、(3.49) 式を満す。

従って、系 (3.49) が特性指数 s をもつことと、系 (3.51) が特性指数 s をもつこととは同値である。言い換えれば、系 (3.49) の特性方程式は、系 (3.51) が特性指数 s をもつ条件に一致する。

(b) $L = (N/M)\pi$ の場合

(1) $L = (N/M)\pi$ 、ただし $M \neq 1$ とする。系 (3.49) の解 $x(t) = e^{st}p(t)$ に対して、 $x_k(t); k = 0, 1, \dots, M-1$ を、

$$x_k(t) = e^{st}p\left(t + \frac{k}{M}\pi\right) = e^{-s\frac{k}{M}\pi}x\left(t + \frac{k}{M}\pi\right), \quad (3.53)$$

によって定義する。また、以下、添字として現われる $[n]$ は整数 n を M で割ったときの正剰余 ($[n] = 0, 1, \dots, M-1$) を表わすと約束する。このとき、

$$\left. \begin{aligned} Hx_k(t) &= f\left(t + \frac{k}{M}\pi\right)x_k(t-L) \\ &= f\left(t + \frac{k}{M}\pi\right)e^{s(t-L)}p\left(t + \frac{k-N}{M}\pi\right) \\ &= e^{-sL}f\left(t + \frac{k}{M}\pi\right)x_{[k-N]}(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

がなりたつから、 $x_0(t), \dots, x_{M-1}(t)$ は次の常微分方程式系を満す。

$$\left. \begin{aligned} Hx_0(t) &= e^{-sL}f(t)x_{[-N]}(t), \\ Hx_1(t) &= e^{-sL}f\left(t + \frac{1}{M}\pi\right)x_{[1-N]}(t), \\ &\vdots \\ Hx_{M-1}(t) &= e^{-sL}f\left(t + \frac{M-1}{M}\pi\right)x_{[M-N-1]}(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

(2)逆に、系(3.55)は同式中のパラメータ s に等しい特性指数をもつ解、

$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{M-1}(t) \end{pmatrix} = e^{st} \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \\ p_{M-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

ここに、 $p_i(t+\pi) = p_i(t)$; $i = 0, 1, \dots, M-1$,

をもつと仮定する。系(3.55)は $t \rightarrow t + \pi/M$ かつ $x_k(t + \pi/M) \rightarrow x_{k+1}(t)$ なる変換に対して不変だから、解(3.56)とともに、

$$e^{st} \begin{pmatrix} p_{M-1}(t + \frac{1}{M}\pi) \\ p_0(t + \frac{1}{M}\pi) \\ \vdots \\ p_{M-2}(t + \frac{1}{M}\pi) \end{pmatrix}, \dots, e^{st} \begin{pmatrix} p_1(t + \frac{M-1}{M}\pi) \\ p_2(t + \frac{M-1}{M}\pi) \\ \vdots \\ p_0(t + \frac{M-1}{M}\pi) \end{pmatrix},$$

なども系(3.55)を満す。いま、 $P_0(t)$, \dots , $P_{M-1}(t)$ を、

$$\begin{aligned} P_0(t) &= p_0(t) + p_{M-1}(t + \frac{1}{M}\pi) + \dots + p_1(t + \frac{M-1}{M}\pi), \\ P_1(t) &= p_1(t) + p_0(t + \frac{1}{M}\pi) + \dots + p_2(t + \frac{M-1}{M}\pi), \\ &\vdots \\ P_{M-1}(t) &= p_{M-1}(t) + p_{M-2}(t + \frac{1}{M}\pi) + \dots + p_0(t + \frac{M-1}{M}\pi), \end{aligned} \quad (3.57)$$

で定義すれば、 $x_k(t) = e^{st} P_k(t)$; $k = 0, 1, \dots, M-1$ も系(3.55)の解であることは明らかである。 $P_k(t) = P_0(t + (k/M)\pi)$ になりたつから、この解は、

$$x_k(t) = e^{st} P_0(t + \frac{k}{M}\pi) ; k = 0, 1, \dots, M-1, \quad (3.58)$$

と表わされる。

(3.58)式中の $x_0(t)$ は同時に(3.49)式を満す。なぜなら、 $P_0(t)$ の周期性によって、

$$x_{[-N]}(t) = e^{st} P_0(t - \frac{N}{M}\pi) = e^{sL} x_0(t - L), \quad (3.59)$$

になりたつから、(3.55)式第1式から、

$$Hx_0(t) = e^{-sL} f(t) x_{[-N]}(t) = f(t) x_0(t-L), \quad (3.60)$$

となるからである。

以上(1)と(2)から，系(3.49)が特性指数 s をもつことと，系(3.55)が特性指数 s をもつこととは同値であることが明らかになった。

(c) $L = (N/2)\pi$ かつ $f(t+\pi/2) = -f(t)$ がなりたつ場合

$L = (N/2)\pi$ ($N = \text{奇数}$) とする。このとき，系(3.55)は，

$$\left. \begin{aligned} Hx_0(t) &= e^{-sL} f(t) x_1(t), \\ Hx_1(t) &= e^{-sL} f(t + \frac{\pi}{2}) x_0(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

となる。

いま，さらに $f(t+\pi/2) = -f(t)$ がなりたつとすれば，系(3.61)は，

$$Hy(t) = j e^{-sL} f(t) y(t), \quad (3.62)$$

と同値である。なぜなら，系(3.61)の解 $x_0(t)$ と $x_1(t)$ を用いて， $y(t)$ を $y(t) = x_0(t) - jx_1(t)$ によって定義するとき，この $y(t)$ は，

$$\left. \begin{aligned} Hy(t) &= e^{-sL} f(t) x_1(t) + j e^{-sL} f(t) x_0(t) \\ &= j e^{-sL} f(t) (x_0(t) - jx_1(t)) \\ &= j e^{-sL} f(t) y(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

によって(3.62)式を満たす。逆に，系(3.62)の解 $y(t)$ を用いて， $x_0(t)$ と $x_1(t)$ を，それぞれ $x_0(t) = y(t)$ と $x_1(t) = jy(t)$ によって定義するとき，これら $x_0(t)$ と $x_1(t)$ は，

$$\left. \begin{aligned} Hx_0(t) &= j e^{-sL} f(t) y(t) = e^{-sL} f(t) x_1(t), \\ Hx_1(t) &= -e^{-sL} f(t) y(t) = e^{-sL} f(t + \frac{\pi}{2}) x_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

によって(3.61)式を満たすからである。

従って， $L = (N/2)\pi$ ($N = \text{奇数}$) かつ $f(t+\pi/2) = -f(t)$ がなりたつときは，系(3.49)が特性指数 s をもつことと，系(3.62)が特性指数 s をもつこととは同値である。次節では，この事実を応用して，系(3.48)の特性方程式を導く。

3.4.3 特性方程式

系(3.48)の周期係数 $\text{sgn}(\sin 2t)$ は， $f(t+\pi/2) = -f(t)$ なる性質を満たすから， $L = (N/2)\pi$ ； $N = \text{奇数}$ のときは，3.4.2節(c)項の結果が応用できる。また， $N = \text{偶数}$ のときは，同

節(a)項の結果が応用できる。従って、系(3.48)と等価な常微分方程式は、

$$\left. \begin{aligned} L &= (N/2)\pi; N = \text{奇数のとき}, \\ \ddot{x}(t) + ax(t) &= j2qe^{-sL} \operatorname{sgn}(\sin 2t)x(t), \\ L &= (N/2)\pi; N = \text{偶数のとき}, \\ \ddot{x}(t) + ax(t) &= 2qe^{-sL} \operatorname{sgn}(\sin 2t)x(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

で与えられる。上式右辺の符号は変えてもよいことに注意すれば、これら2式は、さらに、複素係数の Hill-Meissner 方程式、

$$\ddot{x}(t) + ax(t) = 2qe^{-(s+j)L} \operatorname{sgn}(\sin 2t)x(t), \quad (3.66)$$

に統合することができる。結局、系(3.48)(ただし $L = (N/2)\pi$)の特性方程式は、系(3.66)が特性指数 s をもつ条件に一致することが導かれた。

さて、系(3.66)が特性指数 s をもつ条件は、実係数の Hill-Meissner 方程式の場合と同様にして導かれる。すなわち、 θ_1 と θ_2 を、

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= (\pi/2)\sqrt{a - 2qe^{-(s+j)L}}, \\ \theta_2 &= (\pi/2)\sqrt{a + 2qe^{-(s+j)L}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

で定義するとき、系(3.66)の基本行列解の $t = \pi$ における値 $X(\pi)$ は次式、

$$\left. \begin{aligned} X(\pi) &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \\ \text{ここに,} \\ b_{11} &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \frac{\theta_1}{\theta_2} \sin\theta_1 \sin\theta_2, \\ b_{12} &= \frac{\pi}{2\theta_1} \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \frac{\pi}{2\theta_2} \cos\theta_1 \sin\theta_2, \\ b_{21} &= -\frac{2\theta_1}{\pi} \sin\theta_1 \cos\theta_2 - \frac{2\theta_2}{\pi} \cos\theta_1 \sin\theta_2, \\ b_{22} &= \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \sin\theta_1 \sin\theta_2, \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

で与えられる。特性乗数 μ は $X(\pi)$ の固有値に等しく、特性指数 s は $\mu = e^{s\pi}$ によって決められるから、結局、系(3.66)が特性指数 s をもつ条件は、

$$\left. \begin{aligned} F(s) &= e^{-2s\pi} - 2Be^{-s\pi} + 1 = 0, \\ \text{ここに,} \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

$$B = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \frac{\pi^2 a}{4} \frac{\sin \theta_1}{\theta_1} \frac{\sin \theta_2}{\theta_2},$$

と表わされる。(3.69)式が系(3.48)の特性方程式である。 θ_1 と θ_2 にも s が含まれていることに注意しよう。

(3.69)式で定義される $F(s)$ は整関数であり、この他に周期性など、3.2.2節に述べた複素関数の性質 $2^\circ \sim 5^\circ$ もそのままなりたつ。従って、系(3.48)の安定判別は、この $F(s)$ を用いて、3.2.3節と同じ手順によって行うことができる。 $L=0$ ならば、安定と不安定を分ける境界線は $B=\pm 1$ から決められる。

3.4.4 安定領域図と特性指数の軌跡図

図3.9は、むだ時間を含むHill-Meissner方程式(3.48)式の、それぞれ $L=0$, $L=\pi/2$, $L=\pi$ と $L=2\pi$ に対する安定領域図である。図中の太線、細線、不安定領域中の数字と斜線などの意味は、図3.7におけるものと同じである。図3.9と、むだ時間を含むMathieu方程式

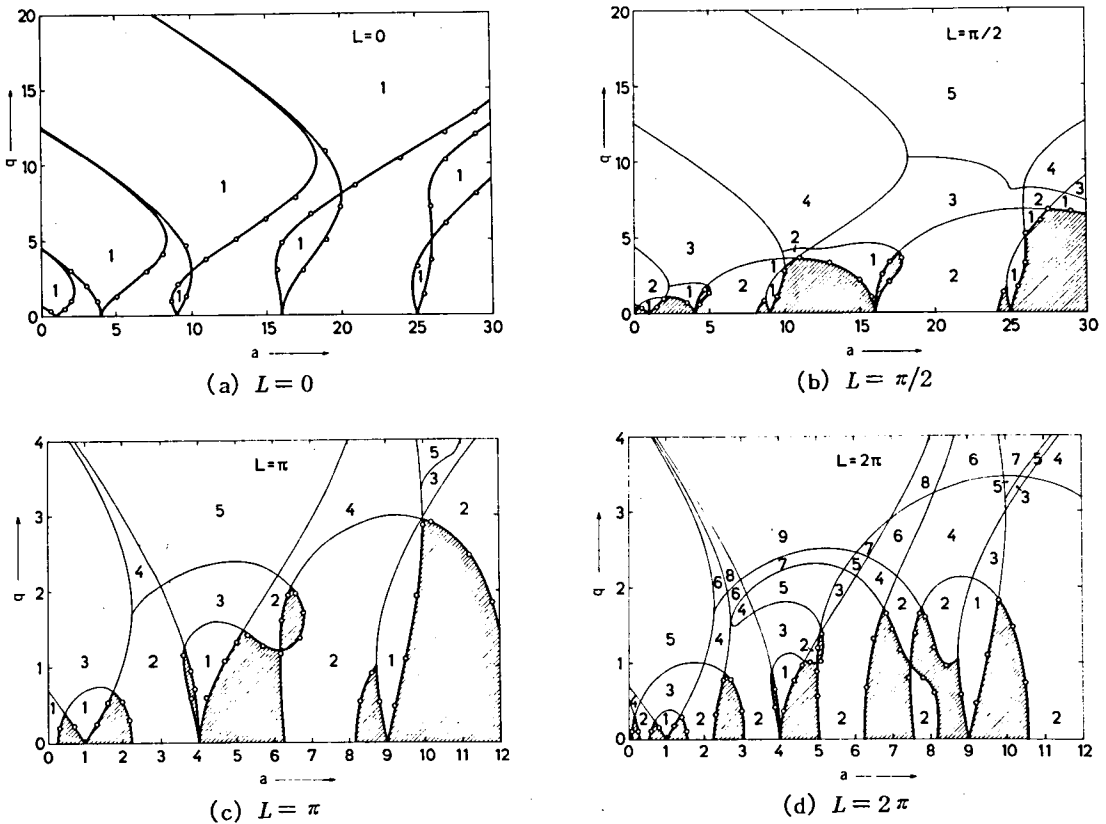
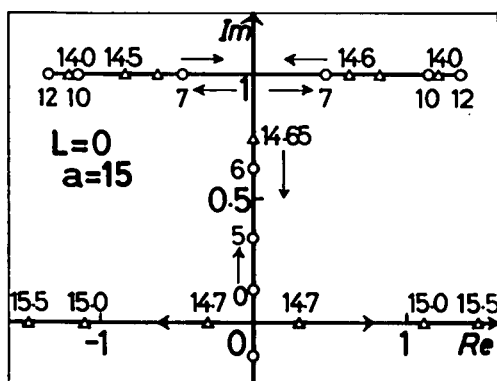


図3.9 むだ時間を含むHill-Meissner方程式の安定領域図。漸近安定領域を斜線で示す。図中の数字は、図3.1の帯状領域中にある特性指数の個数を表わす。

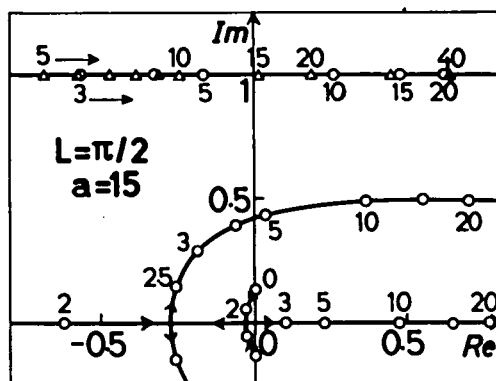
の安定領域図 (図 3.7 (a), 3.7 (g) と 3.7 (h)) とを比べると, $a = 9, 16$ と 25 の付近を除いて, 両者間に定性的な差異はないことが判る。上記付近での違いは, 系 (3.48) の周期係数 $\text{sgn}(\sin 2t)$ が奇数次の高調波成分を含むためと考えられる。○印は, ハイブリッド・シミュレーションによって得た安定限界を示す[†]。実験値 (○印) と計算値 (太線) がよく一致していることは, 3.4.2 節と 3.4.3 節における考察が妥当であったことを示している。

図 3.10 は, q の変化に対する特性指数の軌跡を描いたものである。図 (a) は $L = 0$, 図 (b), 図 (c) と図 (d) は $L = \pi/2$ に対するものである。矢印は, q の増大とともに, 特性指数が動く方向を表わしている。○印, △印と□印は, 図中の q 値に対する特性指数の位置を示す。これらの図は, 実軸および直線 $\text{Im} = j$ に関して対称であることに注意しよう。

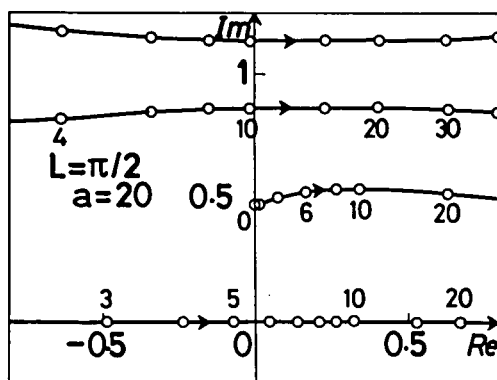
既に 3.3.4 節で, むだ時間が特性指数の性質に与える影響を説明したが (3.3.4 節 $1^\circ \sim 8^\circ$), 図 3.10 から同様な事実が結論される。重複を避けるため, ここで重ねて説明することは割



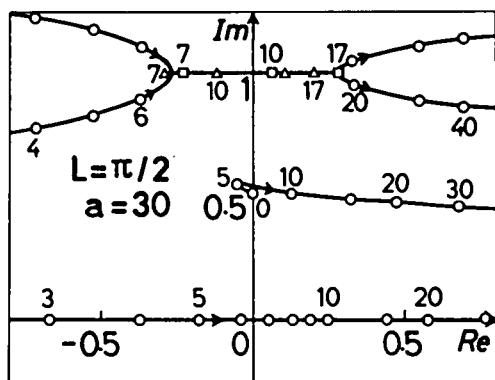
(a) $L = 0, a = 15$



(b) $L = \pi/2, a = 15$



(c) $L = \pi/2, a = 20$



(d) $L = \pi/2, a = 30$

図 3.10 q の変化に対する特性指数の軌跡

[†] 付録 III (b) に, 系 (3.48) のハイブリッド・シミュレータ構成図を示す。

愛するが、上記 $1^\circ \sim 8^\circ$ の記述と図 3.10 を同時に参照することによって、むだ時間の影響は一層よく理解されると思われる。

ここでは別の面から、図 3.10 を見てみよう。 $L = 0$ ならば(図(a))、特性指数は虚軸上、実軸上あるいは直線 $Im=j$ 上のいずれかにあり、しかも虚軸に関して対称的に位置する。これらの性質は、2 個の特性乗数の積が 1 であることによって説明されるから、2 階で損失のない線形周期系に特有の性質である。一方、 $L \neq 0$ ならば(図(b)、図(c)と図(d))、多数個の特性指数が現われるばかりでなく、それらの所在も、上記の三直線上に限定されることはない。また、特定の q 値(図 3.9 の太線と細線で示される値)に対してのみ、特性指数は虚軸上に位置する。以上のように、むだ時間が含まれる場合は、“2 階で損失のない”と云う性質は全く失われてしまう。

3.5 結 言

本章では、むだ時間を含む線形周期系の安定問題について考察した。まず、むだ時間を含む線形周期系の一定判定法を与えた後、2 種類の具体的な系、すなわち、むだ時間を含む Mathieu 方程式、および、むだ時間を含む Hill-Meissner 方程式の安定問題を考察した。結果として、(1)安定領域図、(2)特性指数の軌跡図、および(3)周期係数が微小な場合の特性指数を与えた。そして、これらの結果を通じて、むだ時間が線形周期系の安定性と特性指数の性質に及ぼす影響の一端を明らかにした。従来、この種の系の、安定問題に関する具体的な研究は、殆んど報告されていないので、本章の結果は、この問題に対して新規かつ有用な知見を与えるものと思われる。

第 5 章では、本章の結果を、むだ時間を含む非線形系における定常振動の安定判別に応用する。すなわち、3.3.3 節で、 q の高次項を無視した近似的な特性方程式から、特性指数を陽に求める方法を述べたが、同節における確度 $O(q)$ の議論を、第 5 章で応用する。

第4章 平均法による自励振動の解析^[5,6,7]

4.1 緒 言

本4章では、Minorsky方程式(1.1)式によって記述される系を対象にして、むだ時間と飽和を含む系における自励振動を、第2章で説明した差分微分方程式系に対する平均法を用いて解析する。

振動解析の立場から云えば、Minorsky方程式(1.1)式自身よりも、 $\dot{u}(t) = v(t)$ として得られる次式、

$$\ddot{v}(t) + 2\delta\dot{v}(t) + v(t) + k[1 - v^2(t-L)]\dot{v}(t-L) = 0, \quad (4.1)$$

の方が、結果の解釈の容易さ、および、他の振動系との比較の容易さ、などの点で優れている。そこで、以下では、(1.1)式の代りに、(4.1)式を使用する。そして、(4.1)式をも、Minorsky方程式と呼ぶことにする。

以下、4.2節では、Minorsky方程式の物理的意味を明確にするため、(4.1)式で記述される系をブロック図で表現する。そして、この系に関連して、モード周波数と逆モード周波数なる用語の定義を与える。4.3節では、発振のモード数が1の場合を解析する。平均化方程式の物理的意味を説明するとともに、平均化方程式を介して、van der Pol方程式、

$$\ddot{v}(t) - \mu[1 - v^2(t)]\dot{v}(t) + v(t) = 0, \quad (4.2)$$

で記述される系との同異点にも触れる。4.4節では、発振のモード数が2の場合を解析し、4.5節で数値例によって、系(4.1)における自励振動の主要な性質を説明する。4.6節では、系(4.1)に、常微分方程式系に対する平均法を適用しても、一般に、正しい平均化方程式は得られないことを明らかにする。従来の調和線形化法の疑問点にも触れる。

なお、発振振幅が1より大きいときに、概周期的な自励振動、言い換えれば、振幅が時間的に変化する自励振動が生じると言う報告がある。^(22,24,38) この現象は興味深いものであるけれども、(4.1)式(および図4.1)からも判るように、飽和と云う非線形性に関連して生じる現象ではない。そこで、この現象の考察は、付録Vに譲ることにする。

4.2 Minorsky方程式で記述される系

4.2.1 Minorsky方程式で記述される系

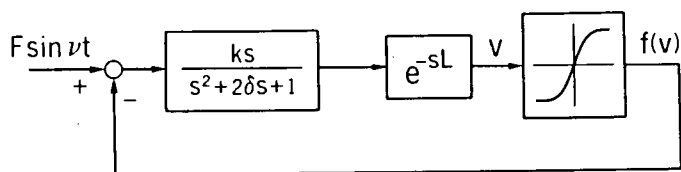


図4.1 Minorsky方程式のブロック図による表現(ただし, $F=0$)。

(4.1)式で記述される系をブロック図で表現すれば、図4.1に示す系(ただし, $F=0$)が得られる。すなわち(4.1)式は、同調要素 $ks/(s^2 + 2\delta s + 1)$ 、むだ時間要素 e^{-sL} 、および飽和要素 $f(v) = v - v^3/3$ ($|v| \leq 1$)から構成される閉ループ系を記述する方程式であると解釈される。 $v(t)$ は、飽和要素の入力値に対応している。

図4.1(ただし, $F=0$)において, $L=0$ とし、かつ加え合せ点の符号を+に変えれば、van der Pol方程式と等価な系が得られる[†]。従って、Minorsky方程式は、言わば、むだ時間を含む van der Pol方程式とも解釈される系である。

4.2.2 モード周波数と逆モード周波数

本論文では、図4.1における線形要素 $G(s)$ 、ここに、

$$G(s) = \frac{ks e^{-sL}}{s^2 + 2\delta s + 1}, \quad (4.3)$$

の特性を表わすものとして、 $G(s)$ の逆ベクトル軌跡の実部と虚部に対応する関数 $A(\omega)$ と $B(\omega)$ 、およびそれらの導関数 $A'(\omega) = dA(\omega)/d\omega$ と $B'(\omega) = dB(\omega)/d\omega$ などを用いる。これらは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} 1/G(j\omega) &= A(\omega) + jB(\omega), \\ A(\omega) &= \frac{1}{k} \left(2\delta \cos \omega L + \frac{1-\omega^2}{\omega} \sin \omega L \right), \\ B(\omega) &= \frac{1}{k} \left(2\delta \sin \omega L - \frac{1-\omega^2}{\omega} \cos \omega L \right), \\ A'(\omega) &= -B(\omega)L - \frac{1+\omega^2}{k\omega^2} \sin \omega L, \\ B'(\omega) &= A(\omega)L + \frac{1+\omega^2}{k\omega^2} \cos \omega L. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

次の公式がなりたつ。

[†]このとき、van der Pol方程式のパラメータ μ は、 $k - 2\delta$ で与えられる。因みに、 $\mu = (k/2\delta - 1) \times 2\delta$ と表わせば μ の物理的意味が明解になる。すなわち、同調要素の中心利得と選択度は、それぞれ $k/2\delta$ と $1/2\delta$ で与えられるから、 μ は(中心利得-1)/(選択度)に等しい。

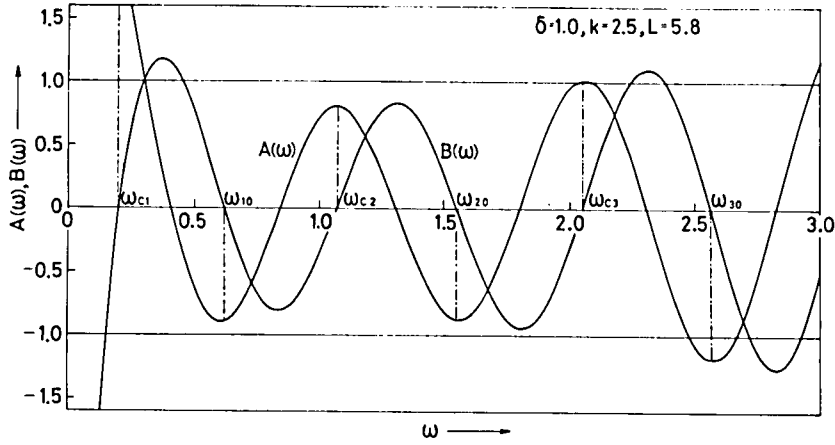


図 4.2 $A(\omega)$ と $B(\omega)$

$$\left. \frac{d(1/G(s))}{ds} \right|_{s=j\omega} = B'(\omega) - jA'(\omega). \quad (4.5)$$

図 4.2 は、後に第 5 章の数値例で用いる系のパラメータ、 $\delta = 1.0$, $k = 2.5$, $L = 5.8$ に対して、 $A(\omega)$ と $B(\omega)$ を描いたものである。

さて、系 (4.1) に関連して、モード周波数と逆モード周波数なる用語を次のように定義する⁽²⁾。まず、図 4.2 において、 ω_{i0} ; $i = 1, 2, 3$ で表わされる周波数、一般的には、

$$B(\omega_0) = 0, \quad A(\omega_0) < 0, \quad (4.6)$$

を満す周波数 ω_0 は、系 (4.1) のモード周波数と呼ばれる。モード周波数は、図 4.1 における閉ループ一巡の位相差が、 $2n\pi$ ($n = \text{整数}$) になる周波数であるから、上記閉ループの共振周波数である。

これに対し、図 4.2 において、 ω_{ci} ; $i = 1, 2, 3$ で表わされる周波数、一般的には、

$$B(\omega_c) = 0, \quad A(\omega_c) > 0, \quad (4.7)$$

を満す周波数 ω_c は、系 (4.1) の逆モード周波数と呼ばれる。逆モード周波数は閉ループ一巡の位相差が $(2n+1)\pi$ ($n = \text{整数}$) になる周波数である。

4.3 自励振動の解析—発振のモード数が 1 の場合

系 (4.1) の線形化系とその特性方程式は、

$$\ddot{v}(t) + 2\delta\dot{v}(t) + v(t) + k\dot{v}(t-L) = 0, \quad (4.8)$$

$$s^2 + 2\delta s + 1 + k s e^{-sL} = 0, \quad (4.9)$$

で与えられる。4.2.2節で定義したモード周波数は、 $0 \leq k < \infty$ に対する(4.9)式の根軌跡が、虚軸と交わる点の値としても定義できる。

さて本4.3節では、(4.9)式は、図4.3の如く、右半面上に1組の共役根、

$$\Delta\sigma \pm j(\omega_0 + \Delta\omega); \Delta\sigma > 0,$$

ここに、 ω_0 はモード周波数 (4.10)

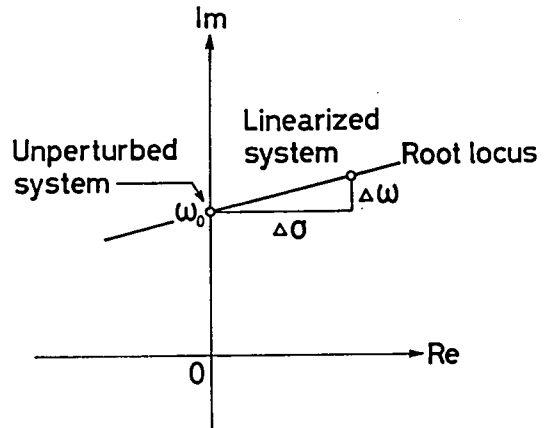


図4.3 線形化系の特性根と無摂動系の特性根

をもち、他の根はすべて左半面にあると仮定する。この仮定によって、発振のモード数は1である。発振の利得条件から、 $|G(j\omega_0)| > 1$ 、従って $1 > 1 + A(\omega_0) > 0$ になりたつことに注意しよう。以下、第2章で説明した平均法の定式化に従って、解析を進める。

4.3.1 無摂動系と空間Cの分解

(1)無摂動系は、虚軸上に $\pm j\omega_0$ なる特性根をもち、他の特性根はすべて左半面にあるように選ぶのが適切である。正数 ε_0 を、

$$\varepsilon_0 = 1 + A_0 = 1 + A(\omega_0) > 0, \quad (4.11)$$

で定義すれば、

$$\ddot{v}(t) + 2\delta\dot{v}(t) + v(t) + k(1 - \varepsilon_0)\dot{v}(t - L) = 0, \quad (4.12)$$

あるいは、 $x_1(t) = v(t)$ 、 $x_2(t) = \dot{v}(t)$ として、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k(1 - \varepsilon_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t - L) \\ x_2(t - L) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

は、上記の条件を満たす。そこで、(4.13)式を系(4.1)の無摂動系と仮定する[†]。これと(4.1)式との差、

$$\varepsilon_0 f = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -k[1 - (1/\varepsilon_0)x_1^2(t - L)]x_2(t - L) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

が摂動項である。

さて以下では、“(4.11)式で定義される ε_0 は小パラメータである”と仮定する。これは、

[†]上記の条件を満たす無摂動系の選び方は1通りではない。ここでは、 ε_0 ができるだけ簡単な形になるよう配慮した。

$1 \gg |G(j\omega_0)| - 1 > 0$ なる仮定と同値である。

(2)無摂動系(4.13)に対して、(2.13)式で定義される随伴系は、

$$\begin{aligned} (\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t)) = & -(y_1(t), y_2(t)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta \end{pmatrix} \\ & -(y_1(t+L), y_2(t+L)) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k(1-\varepsilon_0) \end{pmatrix}, \quad (4.15) \end{aligned}$$

で与えられる。 $\phi = \text{col.}(\phi_1, \phi_2)$ と $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ をそれぞれ C と C^* の要素とすれば、(2.14)式で定義される内積は、

$$(\phi, \phi) = \phi(0)\phi(0) - \int_0^L \phi(\theta+L) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k(1-\varepsilon_0) \end{pmatrix} \phi(\theta) d\theta, \quad (4.16)$$

となる。以下、 $A_0 = \{j\omega_0, -j\omega_0\}$ として、第2章に述べた平均法を適用する。

(3) A_0 に関する C と C^* の部分空間 P と P^* の基底は、それぞれ(4.13)式と(4.15)式から、

$$\phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \theta & \sin \omega_0 \theta \\ -\omega_0 \sin \omega_0 \theta & \omega_0 \cos \omega_0 \theta \end{pmatrix}; -L \leq \theta \leq 0, \quad (4.17)$$

$$\psi^*(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 \theta & -\omega_0 \sin \omega_0 \theta \\ \sin \omega_0 \theta & \omega_0 \cos \omega_0 \theta \end{pmatrix}; 0 \leq \theta \leq L, \quad (4.18)$$

で与えられる。 $\dot{\phi}(\theta) = \phi(\theta)\Omega$ から、行列 Ω は

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

となる。(4.16)式に従って、 (ψ^*, ϕ) を計算すれば、

$$\left. \begin{aligned} (\psi^*, \phi) = & \frac{k\omega_0^2}{2} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 L & -\sin \omega_0 L \\ \sin \omega_0 L & \cos \omega_0 L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'_0 & -A'_0 \\ A'_0 & B'_0 \end{pmatrix}, \\ & \text{ここに, } A'_0 = A'(\omega_0), \quad B'_0 = B'(\omega_0), \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

が得られる。(4.20)式右辺は、(2.15)式右辺と違って単位行列ではないけれども、新たに Ψ を、 $\Psi = (\psi^*, \phi)^{-1} \psi^*$ で定義すれば、 (Ψ, ϕ) は単位行列になる。このとき、 $\Psi(0)$ は次式で与えられる。

$$\Psi(0) = \frac{2}{k\omega_0^2} \begin{pmatrix} B'_0 & -A'_0 \\ A'_0 & B'_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \omega_0 L & \omega_0 \sin \omega_0 L \\ -\sin \omega_0 L & \omega_0 \cos \omega_0 L \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

P の補空間を Q とすれば、相空間 C は $C = P \oplus Q$ と分解される。 P への射影は、 $\phi(\Psi, \cdot)$ で

与えられる。

4.3.2 平均化方程式と定常状態

2.3節に従って、平均化方程式を導く。ただし、 $x_t^{P_1}$ と x_t^Q ((2.24)式と(2.25)式参照)は平均化の際に除かれるから、簡単のため最初から無視する。

ここでは、 $y(t) \rightarrow e^{i\omega_0 t} z(t)$ のような変換でなく、極座標変換、

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + \theta(t)) \\ -\sin(\omega_0 t + \theta(t)) \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

を用いる。このとき、 $x_t^{P_1}$ と x_t^Q を無視すれば、 $x(t-L) = x_t(-L) = \Phi(-L)y(t)$ であることから、 $x_1(t-L)$ と $x_2(t-L)$ は、

$$\left. \begin{pmatrix} x_1(t-L) \\ x_2(t-L) \end{pmatrix} = \Phi(-L) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\omega_0 \sin \alpha \end{pmatrix}, \right\} \quad (4.23)$$

ここに、 $\alpha = \omega_0 t + \theta(t) - \omega_0 L$,

で与えられる。従って、摂動項(4.14)は[†]

$$\varepsilon_0 f = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_0 k \omega_0 r (1 - r^2/r_0^2) \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{ここに、} r_0^2 = 4\varepsilon_0, \quad (4.24)$$

と表わされる。ただし、平均化の際に消える $3\omega_0$ 成分を無視した。

(4.19)式、(4.21)式、(4.22)式と(4.24)式から、極座標変換後の方程式は、

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = -2\varepsilon_0 \begin{pmatrix} B'_0 & A'_0 \\ -A'_0 & B'_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \sin \alpha, \quad (4.25)$$

となる。(4.25)式右辺を平均化すれば、平均化方程式として、

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = -\varepsilon_0 \begin{pmatrix} B'_0 & A'_0 \\ -A'_0 & B'_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (4.26)$$

あるいは、

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon_0 B'_0}{(A'_0)^2 + (B'_0)^2} r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad \dot{\theta} = -\frac{\varepsilon_0 A'_0}{(A'_0)^2 + (B'_0)^2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (4.27)$$

を得る。 $-\varepsilon_0 B'_0 > 0$ であることに注意しよう。

[†]以下、 $r(t)$ と $\theta(t)$ を、それぞれ r 、 θ と略記する。

(4.27)式から, $1^\circ r=0$, $2^\circ r=r_0=2\sqrt{\varepsilon_0}=2\sqrt{1+A_0}$, の2種類の定常状態が得られる。安定判別は容易であるから省略する。結果のみ記せば, 1° は不安定, 2° は安定である。

4.3.3 平均化方程式に含まれるパラメータの意味

平均化方程式(4.27)式中のパラメータ $-\varepsilon_0 B'_0/[(A'_0)^2+(B'_0)^2]$ と $-\varepsilon_0 A'_0/[(A'_0)^2+(B'_0)^2]$ の意味は以下のようなものである。すなわち, 図4.3に示すように, 線形化系(4.8)の右半面上の特性根 $\Delta\sigma+j(\omega_0+\Delta\omega)$ と, それに対応する無摂動系(4.12)の特性根 $j\omega_0$ の間には, $\Delta\sigma+j\Delta\omega$ だけ差があるが, 上記2個のパラメータは, それぞれ $\Delta\sigma$ と $\Delta\omega$ に対応する。正確に言えば, $\Delta\sigma$ と $\Delta\omega$ は次式で与えられる。

$$\Delta\sigma = -\frac{\varepsilon_0 B'_0}{(A'_0)^2 + (B'_0)^2} + o(\varepsilon_0), \quad \Delta\omega = -\frac{\varepsilon_0 A'_0}{(A'_0)^2 + (B'_0)^2} + o(\varepsilon_0). \quad (4.28)$$

従って, $o(\varepsilon_0)$ を無視すれば, 平均化方程式(4.27)式は次のようにも表現される。すなわち,

$$\dot{r} = \Delta\sigma \cdot r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad \dot{\theta} = \Delta\omega \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right). \quad (4.29)$$

この事実は, 線形化系(4.8)と, 平均化方程式(4.27)式の線形化系の, 両者の間の等価性を考えれば当然であろう。

van der Pol方程式(4.2)式の平均化方程式は次式で与えられる⁽⁷⁾

$$\dot{r} = \frac{\mu}{2} r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad \dot{\theta} = 0; \quad r_0 = \sqrt{2}. \quad (4.30)$$

図4.3からも判るように, (4.29)式と(4.30)式の違いは, 線形化系の虚軸付近における根軌跡が, 実軸に平行であるか, そうでないかの違いを反映したものである。しかしながら, (4.29)式において, 一般に $\Delta\sigma \gg |\Delta\omega|$ がなりたつため[†], 両者の間に定性的な差異はない。

また, (4.29)式と(4.30)式の比較から, Minorsky方程式において, van der Pol方程式の μ に対応すべきパラメータは $2\Delta\sigma$ であることが判る。

4.4 自励振動の解析 — 発振のモード数が2の場合

本4.4節では, 線形化系の特性方程式(4.9)式が, 右半面の虚軸近くに, 2組の根,

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_1^* \pm j(\omega_{10} + \Delta\omega_1^*) \text{ と } \Delta\sigma_2^* \pm j(\omega_{20} + \Delta\omega_2^*), \\ \text{ここに, } \omega_{10} \text{ と } \omega_{20}: \text{モード周波数,} \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

[†]関数 $A(\omega)$ はモード周波数近傍で極小値をとるため(図4.2参照), 一般に $|A'_0| \ll |B'_0|$ がなりたつからである。第5章の数値例 $\delta=1.0$, $k=2.5$, $L=5.8$ においては, モード1自励振動で $\Delta\sigma=0.017$, $\Delta\omega=-0.002$, モード2自励振動で $\Delta\sigma=0.022$, $\Delta\omega=0.001$ である。

$$1 \gg \Delta\sigma_1^*, \Delta\sigma_2^*, |\Delta\omega_1^*|, |\Delta\omega_2^*| > 0, \quad]$$

をもち、他の根はすべて左半面にあると仮定する。この仮定によって、発振可能なモード数は2個である。いま、正数 ϵ_{i0} ; $i = 1, 2$ を、

$$\epsilon_{i0} = 1 + A_{i0} = 1 + A(\omega_{i0}), \quad (4.32)$$

によって定義するとき、(4.28)式と同様に、

$$\begin{pmatrix} \Delta\sigma_i^* & -\Delta\omega_i^* \\ \Delta\omega_i^* & \Delta\sigma_i^* \end{pmatrix} = -\epsilon_{i0} \begin{pmatrix} B'_{i0} & A'_{i0} \\ -A'_{i0} & B'_{i0} \end{pmatrix}^{-1} + o(\epsilon_{i0}); \quad i = 1, 2, \quad (4.33)$$

がなりたつ。従って、 $1 \gg \Delta\sigma_i^*, |\Delta\omega_i^*| > 0$; $i = 1, 2$ と $1 \gg \epsilon_{i0} > 0$; $i = 1, 2$ とは同値であるから、以後、 ϵ_{10} と ϵ_{20} は正の小パラメータであると仮定する。

さて、発振のモード数が2以上の場合の解析は、モード数が1の場合に比べて、1つの困難が生じる。本4.4節に即して言えば、上記特性根において一般に $\Delta\sigma_1^* \neq \Delta\sigma_2^*$ であるために、 $\pm j\omega_{10}$ と $\pm j\omega_{20}$ の2組の純虚根を特性根としてもつような無摂動系を見出し難いことである。本節では、この困難を如何に処理するかを中心に述べ、結論として、 $O(\epsilon_{10}, \epsilon_{20})$ の誤差を無視する第1近似解に関する限り、各モード毎に独立に無摂動系を選びうることを明らかにする。

4.4.1 無摂動系と空間Cの分解

(1)本節では、無摂動系を、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k(1-\epsilon_{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-L) \\ x_2(t-L) \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

のように選ぶ。このとき、系(4.34)の、(4.31)中の2根に対応する特性根は、

$$\pm j\omega_{10} \text{ と } \Delta\sigma_2 \pm j(\omega_{20} + \Delta\omega_2), \quad (4.35)$$

で与えられる[†]。 $\Delta\sigma_2$ と $\Delta\omega_2$ に関して、

$$\begin{pmatrix} \Delta\sigma_2 & -\Delta\omega_2 \\ \Delta\omega_2 & \Delta\sigma_2 \end{pmatrix} = (\epsilon_{10} - \epsilon_{20}) \begin{pmatrix} B'_{20} & A'_{20} \\ -A'_{20} & B'_{20} \end{pmatrix}^{-1} + o(|\epsilon_{10} - \epsilon_{20}|), \quad (4.36)$$

がなりたつ。

無摂動系(4.34)に対して、摂動項、随伴系と内積は、それぞれ、(4.14)式、(4.15)式と(4.16)式中の ϵ_0 を ϵ_{10} で置き換えたものとして、与えられる。後の区別のため、摂動項を $\epsilon_{10}f_1$

[†] 後者の根が虚軸上に来るように無摂動系を選んでも、同じ結果が得られる。4.4.3節参照。

で、内積を $(\cdot, \cdot)_1$ で表わす。

以下、第2章で述べた平均法を適用する。ただし、特性根 $\Delta\sigma_2 \pm j(\omega_{20} + \Delta\omega_2)$ は純虚根ではないけれども、 $\Delta\sigma_2$ と $\Delta\omega_2$ は振動項と同じオーダーなので、純虚根のグループ Λ_0 の一員として扱う。

(2)特性根 $\pm j\omega_{10}$ に対する部分空間 P_1 と P_1^* の基底 ϕ_1 と ψ_1^* は、それぞれ、

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega_{10} \theta & \sin \omega_{10} \theta \\ -\omega_{10} \sin \omega_{10} \theta & \omega_{10} \cos \omega_{10} \theta \end{pmatrix}; -L \leq \theta \leq 0, \quad (4.37)$$

$$\psi_1^* = (\phi_1 \text{を転置}); 0 \leq \theta \leq L, \quad (4.38)$$

で与えられ、 $\dot{\phi}_1(\theta) = \phi_1(\theta)\Omega_1$ から、

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{10} \\ -\omega_{10} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

を得る。一方、第2の特性根 $\Delta\sigma_2 \pm j(\omega_{20} + \Delta\omega_2)$ に対する部分空間 P_{2d} と P_{2d}^* の基底 ϕ_{2d} と ψ_{2d}^* は、それぞれ、

$$\phi_{2d} = e^{\Delta\sigma_2 \theta} \begin{pmatrix} \cos \omega_{2d} \theta & \sin \omega_{2d} \theta \\ \Delta\sigma_2 \cos \omega_{2d} \theta - \omega_{2d} \sin \omega_{2d} \theta & \Delta\sigma_2 \sin \omega_{2d} \theta + \omega_{2d} \cos \omega_{2d} \theta \end{pmatrix}; \quad (4.40)$$

$$-L \leq \theta \leq 0, \text{ここに, } \omega_{2d} = \omega_{20} + \Delta\omega_2,$$

$$\psi_{2d}^* = (\phi_{2d} \text{を転置して, } \Delta\sigma_2 \text{を} -\Delta\sigma_2 \text{に変える}); 0 \leq \theta \leq L, \quad (4.41)$$

であり、 $\dot{\phi}_{2d}(\theta) = \phi_{2d}(\theta)\Omega_{2d}$ から、 Ω_{2d} は、

$$\Omega_{2d} = \Omega_2 + \Delta\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{20} \\ -\omega_{20} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\sigma_2 & \Delta\omega_2 \\ -\Delta\omega_2 & \Delta\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

で与えられる。

ψ_1 と ψ_{2d} を、新しく、 $\psi_1 = (\psi_1^*, \phi_1)_1^{-1} \psi_1^*$ と $\psi_{2d} = (\psi_{2d}^*, \phi_{2d})_1^{-1} \psi_{2d}^*$ で定義するとき、 $(\psi_1, \phi_1)_1 = (\psi_{2d}, \phi_{2d})_1 =$ 単位行列となる。

P_1 と P_{2d} の補空間を Q とすれば、相空間 C は、

$$C = P_1 \oplus P_{2d} \oplus Q, \quad (4.43)$$

と分解される。 P_1 と P_{2d} への射影はそれぞれ、 $\phi_1(\psi_1, \cdot)_1$ と $\phi_{2d}(\psi_{2d}, \cdot)_1$ で与えられる。

4.4.2 平均化方程式と定常状態

(1) (4.43)式で表わされる相空間 C の分解に対応して、 x_i を、

$$x_t = \Phi_1 y_1(t) + \Phi_{2d} y_2(t) + x_t^Q, \quad (4.44)$$

と表わすとき、系(4.1)は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= \Omega_1 y_1(t) + \varepsilon_{10} \Psi_1(0) f_1(\Phi_1(-L) y_1(t) + \Phi_{2d}(-L) y_2(t) + x_t^Q(-L)), \\ \dot{y}_2(t) &= (\Omega_2 + A \Omega_2) y_2(t) + \varepsilon_{10} \Psi_{2d}(0) f_1(\Phi_1(-L) y_1(t) + \Phi_{2d}(-L) y_2(t) + x_t^Q(-L)), \\ x_t^Q &= T(t) x_0^Q + \varepsilon_{10} \int_0^t T(t-s) I_0^Q f_1(x_s^Q(-L)) ds, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.45)$$

と分解される。

(4.45)式は系(4.1)の厳密な分解式であるけれども、平均法による第1近似解(2.3節定理における近似解 $\phi(0) e^{\Omega t} z_0$ を指す)には、 $O(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20})$ の誤差が不可避免的に含まれる以上、(4.45)式右辺における $o(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20})$ の誤差を無視する近似的な取り扱いによって、より簡単な結果を得ようと努めるのが合理的である。以下、この方向で議論を進める。ただし、平均化の際に除かれる x_t^Q は、最初から無視する。

さて、(4.45)式において、 f_1 中の $O(\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20})$ の誤差は無視できるから、 Φ_{2d} は

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} \cos \omega_{20} \theta & \sin \omega_{20} \theta \\ -\omega_{20} \sin \omega_{20} \theta & \omega_{20} \cos \omega_{20} \theta \end{pmatrix}; \quad -L \leq \theta \leq 0, \quad (4.46)$$

で置き換えてもよい。また、(4.45)式第2式中の $\Psi_{2d}(0)$ は、 $\Psi_{2d}(0) = (\Psi_{2d}^*, \Phi_{2d})_1^{-1} \Psi_{2d}^*(0)$ によって与えられたが、 Φ_{2d} 、 Ψ_{2d}^* と内積 $(\cdot, \cdot)_1$ を、それぞれ(4.46)式と次の2式、

$$\Psi_2^* = (\Phi_2 \text{を転置}); \quad 0 \leq \theta \leq L, \quad (4.47)$$

$$(\phi, \phi)_2 = \phi(0) \phi(0) - \int_0^{-L} \phi(\theta + L) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k(1 - \varepsilon_{20}) \end{pmatrix} \phi(\theta) d\theta, \quad (4.48)$$

で定義される ϕ_2 、 Ψ_2^* と $(\cdot, \cdot)_2$ に置き換えて、 $\Psi_2(0) = (\Psi_2^*, \Phi_2)_2^{-1} \Psi_2^*(0)$ として与えてもよい。この結果、 $\Psi_1(0)$ と $\Psi_2(0)$ は互に同じ形になり、

$$\Psi_i(0) = \frac{2}{k\omega_{i0}^2} \begin{pmatrix} B'_{i0} & -A'_{i0} \\ A'_{i0} & B'_{i0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \omega_{i0} L & \omega_{i0} \sin \omega_{i0} L \\ -\sin \omega_{i0} L & \omega_{i0} \cos \omega_{i0} L \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, \quad (4.49)$$

で与えられる。

さらに、極座標変換、

$$\begin{pmatrix} y_{i1}(t) \\ y_{i2}(t) \end{pmatrix} = r_i(t) \begin{pmatrix} \cos(\omega_{i0} t + \theta_i(t)) \\ -\sin(\omega_{i0} t + \theta_i(t)) \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, \quad (4.50)$$

を施せば、結局、(4.45)式第1式と第2式は、

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ r_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} &= -\frac{2}{k\omega_{10}} \begin{pmatrix} B'_{10} & A'_{10} \\ -A'_{10} & B'_{10} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 \end{pmatrix} F, \\ \begin{pmatrix} \dot{r}_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Delta\sigma_2 & -\Delta\omega_2 \\ \Delta\omega_2 & \Delta\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r_2 - \frac{2}{k\omega_{20}} \begin{pmatrix} B'_{20} & A'_{20} \\ -A'_{20} & B'_{20} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sin \alpha_2 \\ \cos \alpha_2 \end{pmatrix} F, \\ \text{ここに、} \alpha_i &= \omega_{i0}t + \theta_i(t) - \omega_{i0}L; \quad i = 1, 2, \\ F &= -\epsilon_{10}k \left[1 - (1/\epsilon_{10}) \left(\sum_{i=1}^2 r_i \cos \alpha_i \right)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^2 \omega_{i0} r_i \sin \alpha_i \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

となる。(4.51)式両式の右辺を平均化すれば、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ r_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} &= -\epsilon_{10} \begin{pmatrix} B'_{10} & A'_{10} \\ -A'_{10} & B'_{10} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r_1 \left(1 - \frac{r_1^2 + 2r_2^2}{r_{10}^2} \right), \quad \text{ここに、} r_{10}^2 = 4\epsilon_{10}, \quad (4.52) \\ \begin{pmatrix} \dot{r}_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Delta\sigma_2 & -\Delta\omega_2 \\ \Delta\omega_2 & \Delta\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r_2 - \epsilon_{10} \begin{pmatrix} B'_{20} & A'_{20} \\ -A'_{20} & B'_{20} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r_2 \left(1 - \frac{2r_1^2 + r_2^2}{r_{10}^2} \right), \\ &\dots\dots (4.53) \end{aligned}$$

を得る。しかるに、(4.36)式の関係を考慮すれば($o(|\epsilon_{10} - \epsilon_{20}|)$ は無視する)、(4.53)式は、

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\epsilon_{20} \begin{pmatrix} B'_{20} & A'_{20} \\ -A'_{20} & B'_{20} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r_2 \left(1 - \frac{2r_1^2 + r_2^2}{r_{20}^2} \right), \quad \text{ここに、} r_{20}^2 = 4\epsilon_{20}, \quad (4.54)$$

となる。(4.52)式と(4.54)式が目的の平均化方程式である。(4.33)式から、

$$-\epsilon_{i0} \begin{pmatrix} B'_{i0} & A'_{i0} \\ -A'_{i0} & B'_{i0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\sigma_i^* \\ \Delta\omega_i^* \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, \quad (4.55)$$

であることに注意しよう(ただし、 $o(\epsilon_{10}, \epsilon_{20})$ は無視する)。

(2) (4.52)式と(4.54)式において、 $\dot{r}_i = 0, \dot{\theta}_i = 0; i = 1, 2$ と置くことにより、次の4種類の定常状態を得る。ただし発振周波数は、第1モードは ω_{10} 、第2モードは ω_{20} である。

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ \quad & r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \\ 2^\circ \quad & r_1 = r_{10}, \quad r_2 = 0, \\ 3^\circ \quad & r_1 = 0, \quad r_2 = r_{20}, \\ 4^\circ \quad & r_1 = \sqrt{(2r_{20}^2 - r_{10}^2)/3}, \quad r_2 = \sqrt{(2r_{10}^2 - r_{20}^2)/3}. \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

安定性の検討は容易であるから省略する。結果のみ記せば、 1° と 4° は常に不安定、 2° と 3° はそれぞれ、

$$\tau_{10} > r_{20}/\sqrt{2}, \quad \tau_{20} > r_{10}/\sqrt{2} \quad (4.57)$$

なら安定、そうでなければ不安定である。

4.4.3 平均化方程式の導出過程の再検討

4.4.1節と4.4.2節では、無摂動系(4.34)から出発して、平均化方程式(4.52)式と(4.54)式を得た。この過程において、第1モードの平均化方程式(4.52)式は直截的に得られたが、第2モードに対する(4.54)式は、(4.45)式第2式→(4.51)式第2式→(4.53)式→(4.54)式のように、やや複雑な過程を経て得られた。この違いは、無摂動系(4.34)の前者に対する特性根は虚軸上にあり、後者に対する特性根は虚軸上にないことに基いている。

以上とは逆に、第2モードに対する特性根が虚軸上に来よう、無摂動系を、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k(1-\epsilon_{20}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-L) \\ x_2(t-L) \end{pmatrix}, \quad \dots\dots (4.58)$$

として、議論を進めることもできる。無摂動系(4.58)から出発しても、第1近似に関する限り、同じ平均化方程式(4.52)式と(4.54)式が得られる。そして今度は、第2モードの平均化方程式の方が直截的に得られる。

従って第1近似解に関する限り、第1モードの平均化方程式は無摂動系を(4.34)式として求め、第2モードのそれは無摂動系を(4.58)式として求める方が能率的である。一般化して言えば、第1近似では、各モード毎に独立に無摂動系を選ぶことができ、またそうする方が計算も能率的である、ということである。

発振のモード数が3以上の場合でも、上の事情は変わらない。従って、モード数が3以上の場合についても、本節と同様に解析することができる。

4.5 数 値 例

図4.1における同調要素のパラメータを、

$$\delta = 1.0, \quad k = 2.5 \quad (k/2\delta = 1.25), \quad (4.59)$$

と選び、むだ時間 L に対して、発振周波数 ω_0 と振幅 r_0 を描いたものが、図4.4である。次図における右下りの曲線は、 $B(\omega_0) = 0$ によって決まるモード周波数を表わす。発振周波数はモード周波数に一致する。上記のパラメータでは、 $0.5 < \omega_0 < 2.0$ が発振可能範囲($|G(j\omega_0)| >$

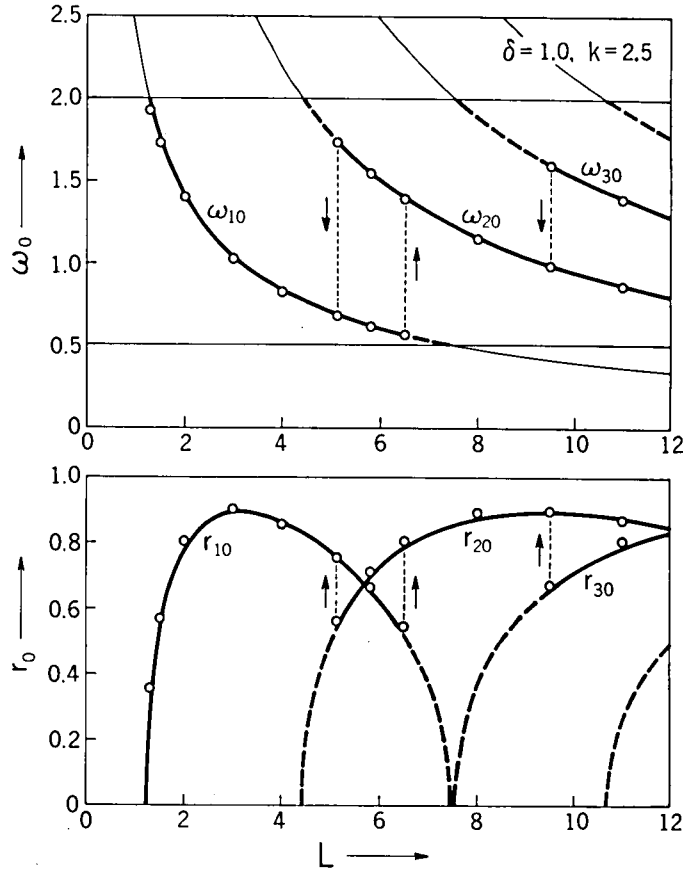


図 4.4 発振周波数 ω_0 と振幅 τ_0

1, あるいは $-1 < A(\omega_0) < 0$) で, この部分を太線で示した。 τ_0 は, $\tau_0 = 2\sqrt{1 + A(\omega_0)}$ で与えられる[†]。破線は, そのモードが (4.57) 式で与えられる安定条件を満たさないことを示している。従って, 破線に対応する自励振動は, 実際には生じない。

図 4.4 に見るように, L の値が小さければ, 自励振動は生じない。 L がある値 ($L = 1.2$) より大きくなると, まず 1 モードの自励振動が生じるようになり, 続いて, 2 モード, 3 モードと複数モードの自励振動が生じるようになる。また, $L = 5.1, 6.4$ と 9.4 付近に見られるように, L の値を連続的に増加または減少させてゆくと, 発振のモードが突然切り替わる現象が生じる。これは, モード・スイッチング現象と呼ばれている^(30, 33)。この過程はヒステリシス特性を示す。

○印はハイブリッド・シミュレーションによる結果を示す。^{††} ω_0 と τ_0 の実験値は, 計算値とよ

[†] 同調要素の中心利得 $k/2\delta$ が $4/3$ より小さければ, むだ時間 L の値に拘わらず, 発振振幅 τ_0 は 1 を越えない。

^{††} 系 (4.1) のハイブリッド・シミュレータの構成は, 付録 IV に示す。

く一致している。また、モード・スイッチングは、 $L = 5.1, 6.5$ と 9.5 で観測された。これらの値も上記計算値とよく一致している。

4.6 考 察

本4.6節では、系(4.1)の解析に、常微分方程式系に対する平均法を適用することの可否について考察する。末尾で、従来、調和線形化法と称せられている方法の疑問点にも触れる。

まず、準備として、系(4.1)を、ベクトル行列形式、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ux(t) + Vx(t-L) + \epsilon_0 f(x(t-L)), \\ \text{ここに, } x(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -k(1-\epsilon_0) \end{pmatrix}, \\ \epsilon_0 f &= \epsilon_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -k[1-(1/\epsilon_0)x_1^2(t-L)]x_2(t-L) \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

で表わし、行列方程式 $\dot{P}(t) = UP(t) + VP(t-L)$ は周期解、

$$P(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t & \omega_0 \cos \omega_0 t \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

をもつと仮定する。周期解の存在条件から、 $B(\omega_0) = 0$ と $\epsilon_0 = 1 + A(\omega_0)$ が導かれる。

さて、系(4.60)に、常微分方程式に対する平均法を形式的に適用すると、次のようになる。まず、系(4.60)の変数 $x(t)$ を、 $x(t) = P(t)y(t)$ によって、 $y(t)$ に変換する。変換後の方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= P^{-1}VP_L(y_L - y) + \epsilon_0 P^{-1}f(P_L y_L), \\ \text{ここに, } y_L &= y(t-L), P_L = P(t-L), \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

となる。過去の論文のなかには、 $y(t)$ は緩変化の関数であるとの理由によって、 $y_L = y$ として、常微分方程式、

$$\dot{y} = \epsilon_0 P^{-1}f(P_L y), \quad (4.63)$$

を変換後の方程式とする流儀もある。(4.62)式と(4.63)式の、それぞれ右辺を平均することにより、平均化方程式、

$$\dot{y} = \bar{F}(y_L - y) + \epsilon_0 \bar{f}(y_L) \quad (\text{差分微分方程式}), \quad (4.64)$$

あるいは、

$$\dot{y} = \epsilon_0 \bar{f}(y) \quad (\text{常微分方程式}), \quad (4.65)$$

を得る。定常状態 y_0 は $\dot{y} = 0$ なる条件から定められる。このとき $y_{0L} = y_0$ になりたつから、(4.64)式と(4.65)式の両平均化方程式から得られる定常状態 y_0 はともに $\bar{f}(y_0) = 0$ から定まる。

$$\left| sI + \bar{F} - \left(\bar{F} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{f}(y_0)}{\partial y_L} \right) e^{-sL} \right| = 0, \quad (4.66)$$

あるいは,

$$\left| sI - \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{f}(y_0)}{\partial y} \right| = 0, \quad (4.67)$$

で与えられる。 y_0 の安定性は、特性根の実部の正負によって判定する。

しかしながら上述の方法には、次のような疑問点が含まれている。

1° (4.62)式右辺第1項が $o(\varepsilon_0)$ の量であることの保証なしに同項を無視して、(4.63)式を変換後の方程式とすること。

2° (4.62)式右辺第1項は小パラメータを含まないにも拘わらず、形式的な平均操作によって平均化方程式(4.64)式を導くこと。

ただし、 δ が k がともに微小量の場合は例外で、 V は微小量であるから、上記1°と2°の疑問点は解消する。すなわち、 δ と k がともに微小量の場合、言い換えれば、無摂動系が常微分方程式で与えられる場合は、上述の解析法は有効である。このとき、変数変換後の方程式は、

$$\dot{y} = \varepsilon_0 P^{-1} f'(P_L y_L), \quad (4.68)$$

の形になるが、(4.68)式に対しては、平均化の際に $y_L = y$ と置くことができるから⁽¹⁰⁾結果的に、平均化方程式は、(4.65)式の形の常微分方程式で与えられる。

それでは、一般の場合に、上述の方法は正しい平均化方程式を与えるであろうか。比較を容易にするため、(4.64)式を $y_L = y - L\dot{y}$ として、 $\dot{y} = \varepsilon_0 (I + \bar{F})^{-1} \bar{f}(y)$ と書き直した後、同式と(4.65)式を極座標形式で表せば、

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = -\varepsilon_0 \left(-LI + \frac{2}{k} e^{-\omega L} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (4.69)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = -\varepsilon_0 \left(\frac{2}{k} e^{-\omega L} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (4.70)$$

が得られる。ここに、 $r_0^2 = 4\varepsilon_0$ 、 I は 2×2 単位行列、そして行列 Ω は(4.19)式で与えられる。一方、前4.3節で得た平均化方程式(4.26)式は、

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = -\varepsilon_0 \left(-LI + \frac{1+\omega_0^2}{k\omega_0^2} e^{-\Omega L} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (4.71)$$

とも表わされる。

(4.69)式～(4.71)式を比較すれば判るように、一般の場合については、常微分方程式系に対する平均法を適用しても、正しい平均化方程式は得られない。とくに、(4.29)式で示される基本的な関係が得られないことに注意しよう。ただし、 $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ から決められる定常状態 $r = r_0$ 自身は、いずれの方法によっても、一致する。

最後に、調和線形化法について一言する。従来の調和線形化法とは、次のようなものであった。 $v(t) = r \cos \omega t$ に対し、

$$f(v(t-L)) = a_1(r)v(t) + a_2(r)\dot{v}(t), \quad (4.71)$$

なる線形化が可能であるとして、系(4.1)の等価線形化系、

$$\ddot{v}(t) + \frac{2\delta + k(1-r^2/4)\cos\omega L}{1-k(1-r^2/4)\frac{\sin\omega L}{\omega}} \dot{v}(t) + \frac{1}{1-k(1-r^2/4)\frac{\sin\omega L}{\omega}} v(t) = 0, \quad (4.72)$$

を導き、

$$2\delta + k(1-r^2/4)\cos\omega L = 0, \quad 1-k(1-r^2/4)\frac{\sin\omega L}{\omega} = \frac{1}{\omega^2}, \quad (4.73)$$

の両式から、発振周波数 ω_0 と振幅 r_0 を求めるものである。 ω_0 と r_0 の値は、確かに、4.3節の結果と一致するけれども、等価線形化系(4.73)自身は、妥当なものとは認め難い。何故なら、 $r=0$ に対する(4.73)式の特性根が、本来の $\Delta\sigma \pm j(\omega_0 + \Delta\omega)$ ((4.10)式参照)とは全然異なるからである。この原因は、(4.72)式で与えられる線形化の意味が不明確である点に発している。

4.7 結 言

本章では、Minorsky方程式(4.1)式で記述される系における自励振動を、差分微分方程式系に対する平均法を用いて解析した。自励振動に関する系(4.1)の性質は次のように要約される。すなわち、系(4.1)には、周波数と振幅の異なる複数個の発振モードが存在しうる。ただし、定常状態においては、系はいずれか1個のモードで発振し、他のモードは抑制されてしまう。従って、定常発振波形はほぼ正弦波である。

常微分方程式系に対する平均法に比べると、差分微分方程式系に対する平均法は、平均化方程式を得るまでの手順が複雑である。この複雑さは、差分微分方程式が無限次元空間上で定義された方程式であることに基いているが、結果として得られる平均化方程式は常微分方程式であるので、平均化方程式から定常応答を導出し、その安定判別をする過程は、常微分方程式系における通常の議論と同様である。

平均化方程式が、一般に非線形常微分方程式の連立系で与えられると云う事実は、系(4.1)の性質を理解する上で重要なことと思われる。何故なら、この事実は、系(4.1)の性質が、(むだ時間を含まない)多自由度非線形系のそれと類似であることを示唆するからである。両者の間の類似性については、強制振動を考察した後、5.8節で詳しく述べる。

最後に、むだ時間を含む系の解析に、常微分方程式系に対する平均法を適用することの可否について考察した。そして、無摂動系が常微分方程式で与えられる場合は可であるけれども、一般の場合は否であること、すなわち、正しい平均化方程式が得られないことを明らかにした。

第5章 調波解析法による強制振動の解析^[8, 9, 10, 11]

5.1 緒 言

本5章では、強制項をもつMinorsky方程式、

$$\ddot{v}(t) + 2\delta\dot{v}(t) + v(t) + k[1 - v^2(t-L)]v(t-L) = \nu k F \cos \nu t, \quad (5.1)$$

で記述される系を対象にして、むだ時間を含む非線形系における強制振動を考察する。(5.1)式によって記述される系のブロック図は、既に図4.1に示した。

強制振動に関する研究の現状は1.1節で述べたが、同節に挙げた諸論文に比較して、本章の研究は以下の点に新規性がある。

(1) 問題の設定。従来は、自励振動がただか1モードの場合を考察の対象としていたのに対して、本章では、多モード発振と言うむだ時間を含む系の重要な特徴は保持しつつ、同時に理論的な取り扱いの容易さをも考慮して、2モードの自励振動が存在する場合を考察の対象にする。また従来は、入力領域を限定するなど、断片的な研究しかなされていなかったのに対して、本章では、系(5.1)に生じる各種強制振動の定常応答とその安定性を系統的に解明する。基本的な現象については、その物理的意味をも述べる。そして、これらの検討を総合することにより、系(5.1)(と系(4.1))の振動系としての性質は、むだ時間を含まない多自由度非線形系のそれに強く類似していることを明らかにする。

(2) 解析法。本章では、1.1節で述べた(a)の解析法を使用する。すなわち、振動の定常応答は調波解析法(記述関数法)によって求め、その安定性は線形時変系の安定問題として考察する。周期振動に対する変分方程式は線形周期系となるので、その安定判別には、第3章の成果が応用できる。また、概周期振動の変分方程式は線形概周期系となるが、その安定判別も、周期振動の場合とほぼ同様に行いうることを示す。

(3) ハイブリッド・シュミレーション。従来の報告では、解析結果の、実験あるいはシュミレーションによる検証が殆んど行われていない。本章では、ミニコンをむだ時間要素とするハイブリッド・シミュレータを構成し、シミュレーションによって、すべての解析結果の妥当性を検証する。とくに、シミュレータに、高速Fourier変換を応用する波形解析機能を付加することによって、周期振動のみならず概周期振動についても、理論値の妥当性を直接的に検証することを可能にしている。ハイブリッド・シミュレータの構成は、付録Ⅳで述べる。

5.2 強制振動の種類とその形式

5.2.1 強制振動の解析における仮定

4章で説明したように、むだ時間の長さによって、発振モードの個数は変化する。系(5.1)に生じる強制振動の種類とその形式は、第一義的には、発振モードの個数によって決まると考えられるが、考察の過程を首尾一貫させ、また、結果を自己完結的なものにするためには、発振モードの個数を予め仮定しておくのが望ましい、と思われる。そこで、以後の解析では、

(1) 発振モードの個数は2である、

と仮定する。その理由は次の1°~3°に示すとおりである。

1° 多モード発振は、むだ時間を含む系の特徴的な性質である。従って、複数個の発振モードが存在する状況を、考察の対象とすることが望ましい。

2° むだ時間を含む系に固有の性質として、発振モードの個数が多くなると、それらの発振周波数は、必然的にはほぼ等間隔に並ぶようになる。⁽³³⁾ 解析の際には、当然、この等間隔性をも考慮に入れねばならないであろうから、発振モードの個数が3以上の系では、解析が著しく複雑になると考えられる。

3° 2°に述べた性質を考慮すると、発振モードの個数が3以上の系に見られる現象は、モードの個数が2の系に見られる現象と同じもの、あるいは、それらの複合したもの、として理解できる場合が多いと考えられる。

また、解析の簡単のため、2個の発振モード(周波数 ω_{10} と ω_{20} ; $\omega_{10} < \omega_{20}$)の間に、いわゆる内部共振の関係はないと仮定する。すなわち、

(2) ω_{20}/ω_{10} は、2あるいは3の近傍にない。

この仮定は、系のパラメータ値の特殊な組合せを除いて、一般に満される。

さて、4.2.2節で述べた定義によれば、むだ時間を含む系(5.1)には無限個のモード周波数 $\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, \dots$ が存在する。これらのうちの大半は、同調要素(図4.1参照)における利得が小さいため、実際の現象に寄与することはないけれども、たとえ発振条件($|G(j\omega_{i0})| > 1$)は満さなくても、同調要素から十分な利得を得るモード周波数があれば、解析の際にその存在を考慮に入れなければならないと考えられる。しかし、ここでは、以後の解析、とくに安定性の検討が複雑になるのを避けるため、次の仮定を設ける。

(3) 発振条件を満さないモード周波数 $\omega_{30}, \omega_{40}, \dots$ の影響は無視できる。

ただし、上述の3°と同じ意味において、系(5.1)の性質を理解する上で、仮定(3)が大きい支障になることはないと考えられる。

さて次節以降の数値例では、上記の仮定(1)~(3)をほぼ満す系のパラメータとして、

$$\delta = 1.0, \quad k = 2.5, \quad L = 5.8, \quad (5.2)$$

を用いる。このパラメータ値における発振周波数 ω_0 と振幅 r_0 の値を表5.1に示す。()内はシミュレーションによる値である。波形解析の結果によれば、自励振動に含まれる3次高調波振幅は、モード1で基本調波の2%，モード2で同じく3%である。なお、モード3とモード4は発振条件は満たさないが、後の参考のために記入した。

5.2.2 強制振動の種類とその形式

発振モードの個数が2の系には、表5.2に示す種類の強制振動が生じる。ここに、 ω_{i0} と ω_{j0} ； $(i, j) = (1, 2)$ か $(2, 1)$ は、これら2モードの発振周波数を表わす。同表第3欄は、振動を構成する主要成分の周波数を示し、第4欄は、その振動が発生する入力周波数の範囲を示す。発振モードの個数が2の系では、同一入力に対して、一般に2種類の強制振動が生じること注意到しよう。いずれの振動が生じるかは、系の初期条件に依存する。

第1項~第3項の周期振動は、自励成分が入力成分によって同期化または抑制された状態であり、第4項以下の概同期振動は、自励成分と入力成分が非同期的に共存する状態である。後者において、第4項は、自励成分と入力成分の高調波および混変調波が、 ω_{i0} と ω_{j0} のいずれにも近くない場合であり、第5項~第7項は、これらのうちのいずれかが ω_{j0} または ω_{i0} 自身に近

表5.1 発振周波 ω_0 と振幅 r_0 ($\delta = 1.0, k = 2.5, L = 5.8$)

モード	ω_0	r_0	備考
1	0.621 (0.620)	0.655 (0.66)	$r_{10}/\sqrt{2}$ = 0.463
2	1.552 (1.550)	0.697 (0.71)	$r_{20}/\sqrt{2}$ = 0.493
3	2.566	—	
4	3.614	—	

() 内の数値はシミュレーションによる。

表 5.2 強制振動の種類とその形式⁽¹⁾

	項	主要成分の周波数	入力周波数の範囲	本章での名称	備 考
周期振動	1	ν	第 3 項を除く全域	基本調波振動	5.3 節
	2	$\nu, \nu/3$	$\nu \doteq 3\omega_{i0}$	1/3 次分数調波振動	5.4 節
	3	$\nu, 3\nu$	$\nu \doteq \omega_{i0}/3$	3 次高調波振動	5.5 節
概周期振動	4	ν, ω_{i0}	第 2, 3, 5, 6, 7 項を除く全域	2 周波概周期振動	5.6 節
	5	$\nu, 3\nu, \omega_{i0}$	$\nu \doteq \omega_{j0}/3$	—————	6.3 節
	6	$\nu, \omega_i, \omega_j^{(2)}$	$\nu \doteq \omega_{i0} \pm \omega_{j0} /2^{(3)}$ および $\nu \doteq 2\omega_{i0} \pm \omega_{j0} ^{(4)}$	3 周波概周期振動	5.7 節
	7	ν, ω_{i0} に近い多数の周波数	$\nu \doteq \omega_{i0}, 3\omega_{i0}, \omega_{i0}/3$	—————	—————

(1) $(i, j) = (1, 2)$ か $(2, 1)$,

(2) $\omega_i \doteq \omega_{i0}, \omega_j \doteq \omega_{j0}$,

(3) $|\omega_i \pm \omega_j| = 2\nu$,

(4) $|\nu \pm \omega_j| = 2\omega_i$ 。

づくため、共振によって成長する場合である。第 6 項では、 ω_j 成分[†]の成長により、もとの自励成分の周波数は ω_{i0} から若干変化する。第 7 項は、自励成分が入力成分によって、同期化される直前の状態である。

本章では、これら 7 種類の強制振動のうちから、備考欄に節番号を付したところの、5 種類の振動について考察する。第 5 項で示される振動は、第 3 項と第 4 項の振動の複合したものと考えられるので、後に 6.3 節で簡単に触れるに留める。また、第 7 項で示される振動の解析は、本章のような、振動を調波成分の和で表わすという方法では困難であるから、考察の対象から除外する。

5.3 基本調波振動

本 5.3 節では、入力と同一周波数の振動成分のみが優勢な、基本調波振動について考察する。

5.3.1 基本調波振動の定常応答

系 (5.1) に、基本調波振動、

[†] 周波数 ω_j の振動成分を意味する。以下でも、この省略法を用いる。

$$v = c \sin(\nu t + \varphi_\nu), \text{ ここに, } 1 > c > 0, \quad (5.3)$$

が持続しているとする。この振動の周期性の条件は,

$$\left. \begin{aligned} 1 + G(j\nu) [N(c) - F/c \cdot e^{-j\varphi_\nu}] &= 0, \\ \text{ここに, } N(c) &= 1 - c^2/4, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

で与えられる。 $G(s)$ は (4.3) 式で定義される[†]。(5.4) 式から, 振幅 c と位相 φ_ν は,

$$\left. \begin{aligned} [A(\nu) + N(c)]^2 + \{B(\nu)\}^2 c^2 &= F^2, \\ \varphi_\nu &= -\tan^{-1}[B(\nu)/\{A(\nu) + N(c)\}], \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

で定められる。基本調波振動の定常応答は (5.5) 式から, 決定される。

5.3.2 安定性の検討

(a) 変分系

基本調波振動からの微小な変分を ξ とする。すなわち,

$$v = c \sin \nu t + \xi, \text{ ここに, } 1 > c > 0, \quad 1 \gg |\xi|. \quad (5.6)$$

位相 φ_ν を零と置いても, 一般性は失われない。さて, (5.6) 式で表わされる振動が, 飽和要素 $f(v) = v - v^3/3$ を通過するとき, その出力中の ξ の 1 次項は, $[1 - (c \sin \nu t)^2] \xi$ で与えられる。従って, ξ の高次の項を無視すれば, 変分 ξ を支配する系として, 図 5.1 に示す線形周期系が得られる。

ここに,

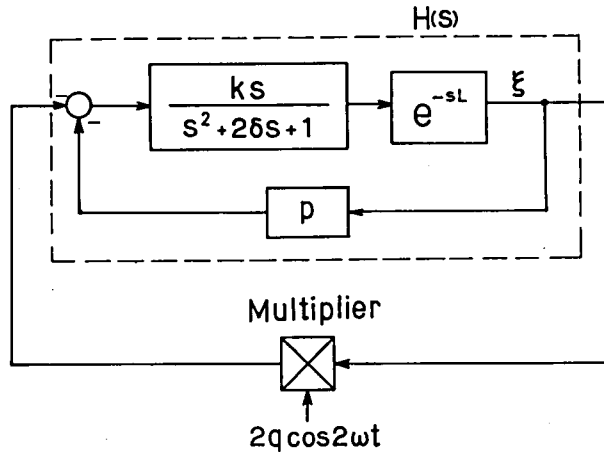


図 5.1 変分系。

[†] 関数 $A(\nu)$, $B(\nu)$, $A'(\nu)$, $B'(\nu)$ などは, (4.4) 式で定義されるものである。

$$\left. \begin{aligned} p &= 1 - c^2/2 \quad (1 > p > 1/2), \\ q &= c^2/4 \quad (1/4 > q > 0), \\ \omega &= \nu, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

である。この系は、変分方程式に対応するものであるから、以下では、変分系と呼ぶことにする。基本調波振動の安定性が、この変分系の安定性に同値であることは明らかであろう。

ここで、 q は 1 に比べて微小であることに注意しよう。従って、基本調波振動の安定問題は、結局、 q が微小な場合について、図 5.1 に示される線形周期系の安定問題を考察することに帰着される。

(b) 変分系の安定条件

(1) 図 5.1 の、破線で囲まれる閉ループの伝達関数を、 $H(s)$ で表わす。

ここに、 $H(s)$ は、

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + pG(s)}, \quad \text{ここに, } G(s) = \frac{kse^{-sL}}{s^2 + 2\delta s + 1}, \quad (5.8)$$

で与えられる。図 5.1 の系における $H(s)$ と、図 3.2 の系における $e^{-sL}/(s^2 + a)$ を同一視すれば、両系は同じ構造である。従って、変分系の安定判別に、3.3 節の結果、就中、周期係数が微小な場合を検討した 3.3.3 節の結果が応用できる。明確に云えば、同節における確度 $O(q)$ の議論をここに応用する。

(2) 上記 $H(s)$ で表わされる閉ループは、5.2.1 節で述べた仮定によって、虚軸の近傍に 2 組の特性根をもつ。これらの特性根は、それぞれ、 $\pm j\omega_{10}$ と $\pm j\omega_{20}$ の近傍にある。 q が微小ならば、変分系の安定性は、これら特性根の近傍にある特性指数によって決まると考えられる。そこで、以下では、 $\pm j\omega_{10}$ と $\pm j\omega_{20}$ の近傍にある特性指数に注目する。ただし、虚部が正なるものに注目すれば十分である。以下、これら 2 個の特性指数を、それぞれ s_1^* ($\equiv j\omega_{10}$) と s_2^* ($\equiv j\omega_{20}$) で表わす。

(3) ω_{10} と ω_{20} は、 $H(s)$ で表わされる閉ループの共振周波数に他ならないから (4.2.2 節参照)、変分系の共振条件は、 $\nu \equiv \omega_{10}$ 、 ω_{20} と $|\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ で与えられると考えてよいであろう (この妥当性は、(7) で数値例によって確認する)。従って、変分系の状態は次の 3 種類に分類される。(1) $\nu \equiv \omega_{10}$ 、 ω_{20} と $|\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ のいずれもがなりたたない非共振の状態。(2) $\nu \equiv \omega_{10}$ か $\nu \equiv \omega_{20}$ がなり立つ共振の状態。(3) $\nu \equiv (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ か $\nu \equiv |\omega_{10} - \omega_{20}|/2$ がなり立つ共振の状態。以下では、各場合について、 s_1^* と s_2^* を陽に求めることにより、変分系の安定条件を導く。

(4) 非共振の場合。3.3.3 節(a)項で述べたように、確度 $O(q)$ で特性指数を求める際には、パラメータ励振効果を無視してよい(図 3.4 参照)。従って、この場合は、

$$1 + pG(s) = 0, \quad (5.9)$$

から、 s_1^* と s_2^* を求めることができる。 $O(|\Delta s|^2)$ を無視する次の近似式、

$$1/G(j\omega + \Delta s) = A(\omega) + jB(\omega) + \Delta s [B'(\omega) - jA'(\omega)], \quad (5.10)$$

を用いることにより((4.5)式参照)、 s_i^* ; $i=1, 2$ は、

$$\left. \begin{aligned} s_i &= j\omega_{i0} + \frac{1}{4}(2c^2 - r_{i0}^2) \frac{B'_{i0} + jA'_{i0}}{(A'_{i0})^2 + (B'_{i0})^2}, \\ \text{ここに、} A'_{i0} &= A'(\omega_{i0}), B'_{i0} = B'(\omega_{i0}), \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

と求まる。 r_{i0} は自励振動振幅である。 $B'(\omega_{i0}) < 0$; $i=1, 2$ であるから(図 4.2 参照)、この場合の安定条件は、

$$c > \max(r_{10}/\sqrt{2}, r_{20}/\sqrt{2}), \quad (5.12)$$

で与えられる。

(5) $\nu \doteq \omega_{10}$ か ω_{20} がなりたつ場合。まず、 $\nu \doteq \omega_{10}$ であるとしよう。 s_1^* ($\doteq j\omega_{10}$) は、3.3.3 節(b)項と同様に求められる。すなわち、 $s_1^* = j\nu + \Delta s$ とするとき、 Δs は 2×2 行列式、

$$\begin{vmatrix} 1 & qH(\Delta s - j\nu) \\ qH(\Delta s + j\nu) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.13)$$

から確度 $O(q)$ で求められる(図 3.6 参照)。 $|\Delta s| \ll 1$ として、(5.13)式に近似式(5.10)式を適用すれば、

$$\left. \begin{aligned} [(A'_\nu)^2 + (B'_\nu)^2](\Delta s)^2 + 2[(p + A'_\nu)B'_\nu - A'_\nu B'_\nu]\Delta s + (p + A'_\nu)^2 + B'^2_\nu - q^2 &= 0, \\ \text{ここに、} A'_\nu &= A'(\nu), \dots, B'_\nu = B'(\nu), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.14)$$

が得られる。(5.14)式から、 $\text{Real}(\Delta s) < 0$ であるための条件として、

$$(p + A'_\nu)B'_\nu - A'_\nu B'_\nu > 0, \text{ かつ、 } (p + A'_\nu)^2 + B'^2_\nu - q^2 > 0, \quad (5.15)$$

を得る。 $O(|\nu - \omega_{10}|^2)$ を無視すれば、(5.15)式第1式は、 $c > r_{10}/\sqrt{2}$ と等価である。

一方、 $\nu \doteq \omega_{10}$ ならば、 s_2^* ($\doteq j\omega_{20}$) の決定に対しては、(1)と同様、パラメータ励振効果は無

視してよいと考えられる。従って、 $\text{Real}(s_2^*) < 0$ なるための条件は、 $c > r_{20}/\sqrt{2}$ で与えられる。

以上を総合すれば、 $\nu \doteq \omega_{10}$ に対する変分系の安定条件として、

$$c > \max(r_{10}/\sqrt{2}, r_{20}/\sqrt{2}), \text{ かつ, } (p+A_\nu)^2 + B_\nu^2 - q^2 > 0, \quad (5.16)$$

を得る。

$\nu \doteq \omega_{20}$ に対しても、以上と同様に議論でき、結果として、(5.16) 式と同じ安定条件を得る。

(6) $\nu \doteq (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ か $|\omega_{10} - \omega_{20}|/2$ がなりたつ場合。まず、 $\nu \doteq (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ としよう。この場合も、3.3.3 節(b)項と同様に、 s_i^* ; $i = 1, 2$ が求められる。すなわち、

$$\begin{vmatrix} 1 & qH(s-j\nu) \\ qH(s+j\nu) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.17)$$

の虚軸近傍の根を、 $s = \sigma + j\beta$: $1 \gg |\sigma|$, $\nu \geq \beta \geq 0$ とするとき、 s_1^* と s_2^* は、それぞれ、

$$s_1^* = \bar{\sigma} + j\nu, \quad s_2^* = \sigma + j\nu, \quad (5.18)$$

で与えられる(図 5.2 参照)。 s_1^* と s_2^* は独立でないことに注意しよう。

上記の根 $s = \sigma + j\beta$ を求めよう。(5.17) 式を、

$$\left. \begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & qH(\sigma - j\omega_1) \\ qH(\sigma + j\omega_2) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ & \text{ここに, } \omega_1 = \nu - \beta, \quad \omega_2 = \nu + \beta, \\ & (\omega_1 + \omega_2 = 2\nu, \quad \omega_1 \doteq \omega_{10}, \quad \omega_2 \doteq \omega_{20}), \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

と書き直した後に、 $|\sigma| \ll 1$ として近似式(5.10) 式を適用すれば、(5.19) 式の実部と虚部に対応するものとして、

$$\left. \begin{aligned} X(\sigma) &= (A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2) \sigma^2 + [(p+A_1)B'_2 + (p+A_2)B'_1 - A'_1 B_2 - A'_2 B_1] \sigma \\ &\quad + (p+A_1)(p+A_2) + B_1 B_2 - q^2 = 0, \\ Y(\sigma) &= (A'_1 B'_2 - A'_2 B'_1) \sigma^2 - [(p+A_1)A'_2 - (p+A_2)A'_1 + B_1 B'_2 - B'_1 B_2] \sigma \\ &\quad + (p+A_1)B_2 - (p+A_2)B_1 = 0, \\ &\text{ここに, } A_1 = A(\omega_1), \quad \dots, \quad B'_2 = B'(\omega_2), \\ &\quad \omega_1 + \omega_2 = 2\nu (\omega_1 \doteq \omega_{10}, \quad \omega_2 \doteq \omega_{20}), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5.20)$$

が得られる。結局、 $X(\sigma) = 0$ と $Y(\sigma) = 0$ が共通実根をもつ条件から、 ω_1 と ω_2 が決まり、その後、 σ が決まる。 $\sigma < 0$ がこの場合の安定条件である。

安定限界は、 $X(0) = Y(0) = 0$ なる条件、すなわち、

$$\left. \begin{aligned} (p+A_1)(p+A_2)+B_1B_2-q^2 &= 0, \\ (p+A_1)B_2-(p+A_2)B_1 &= 0, \\ \text{ここに、}\omega_1+\omega_2=2\nu(\omega_1\triangleq\omega_{10}, \omega_2\triangleq\omega_{20}), \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

から導かれる。

$\nu \triangleq |\omega_{10} - \omega_{20}|/2$ に対しては、 ω_1 か ω_2 の符号の変えさえすれば、以上の議論がそのままなりたつ。

(7) 以上に得られた安定条件の妥当性を、変分系の安定領域図によって確認しよう。変分系に含まれるパラメータは、 δ 、 k 、 L 、 p 、 q と ν の 6 種類あるが、安定領域図は、周期係数に関連する νp 平面上に描くことにし、他のパラメータ値は次の

ように選定する。 δ 、 k と L は、本章を通じて用いる数値、 $\delta = 1.0$ 、 $k = 2.5$ 、 $L = 5.8$ とする。この場合のモード周波数と自励振動振幅は、表 5.1 に与えられている。 p の値は、 $H(s)$ が不安定極をもたないように選ぶ。すなわち、表 5.1 と (5.12) 式から、 $c > 0.493$ 、あるいは、 $p = 1 - c^2 < 0.878$ なら、 $H(s)$ は不安定極をもたない。ここでは、 $p = 0.85$ ($c = 0.55$) とする。このとき、 $q = c^2/4 = 0.075$ であるから、安定判別図の $q = 0.075$ 付近の様子が重要である。

変分系の上記のパラメータに対する安定領域図を図 5.3 に示す[†]。図中の太線は安定限界を示す。この境界線より下側が漸近安定領域、上側が不安定領域である。○印は、ハイブリッド・シミュレータによる実験結果である。一点鎖線で示す $q = 0.075$ 付近において、不安定領域は、 $\nu = \omega_{10}$ 、 ω_{20} と $|\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ の近傍に存在し、その他で変分系は漸近安定である。これは、(3)で述べた共振条件の仮定が妥当であったことを示している。図 5.3(b)～図 5.3(d)における細線は、(5.16) 式第 2 式と (5.21) 式から導かれる安定限界を描いたものである。 $q = 0.075$ 付近では、安定限界を十分よく近似しているから、両式は妥当なもの認められる。

5.3.3 数値例

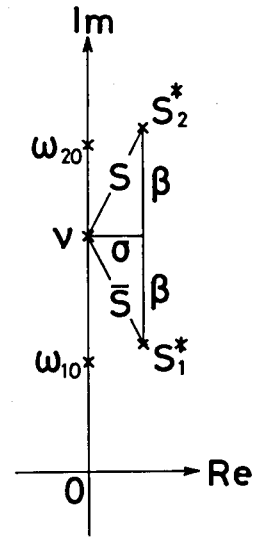
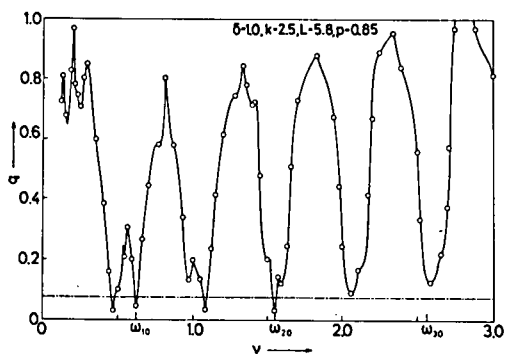
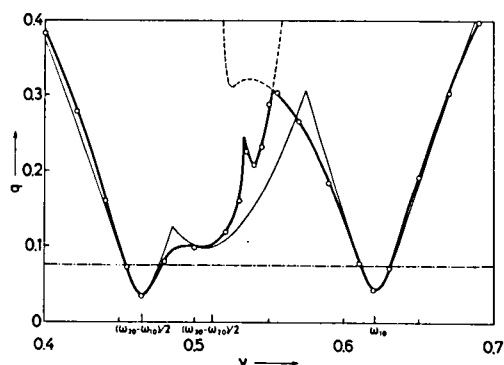


図 5.2 変分系の特性指数 s_1^* と s_2^* 。

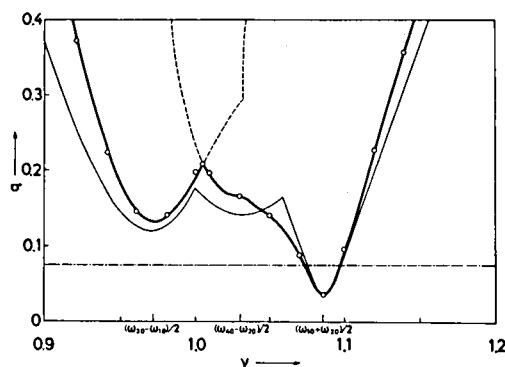
[†] これら安定領域図の数値計算では、無限行列式を 19×19 で打ち切った。この際の打ち切り誤差は 2% 以下である。



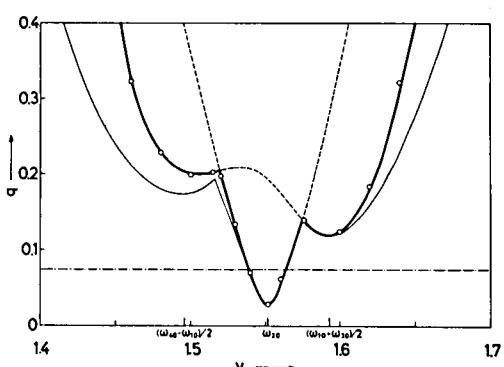
(a) $\nu = 0 \sim 3.0$



(b) $\nu = 0.4 \sim 0.7$ の拡大図



(c) $\nu = 0.9 \sim 1.2$ の拡大図



(d) $\nu = 1.4 \sim 1.7$ の拡大図

図 5.3 変分系の安定領域図。1点鎖線は $q = 0.075$ を表わす。図(b), 図(c)と図(d)における細線は, 2×2 行列式による近似の結果である。

系 (5.1) のパラメータ値は $\delta = 1.0$, $k = 2.5$, $L = 5.8$ とする。このとき, 2 個の発振モードが存在する。その周波数と振幅は表 5.1 に与えられている。

基本調波振動の応答曲線を図 5.4 に示す。図中の I と II は 2 モードの自励振動を表わす。モード周波数の定義からも明らかなように, 系 (5.1) はモード周波数近傍の入力に対して共振する。太線は, 5.3.2 節で誘導した安定限界を示す。応答曲線の安定な部分は実線で, 不安定な部分は破線で描いた。同図には, $c > 1$ なる領域にも応答曲線が描かれているが, この領域に対しては, 飽和要素の特性を,

$$f(v) = \begin{cases} v - v^3/3 & \cdots \cdots |v| \leq 1, \\ 2/3 \operatorname{sgn} v & \cdots \cdots |v| > 1, \end{cases} \quad (5.22)$$

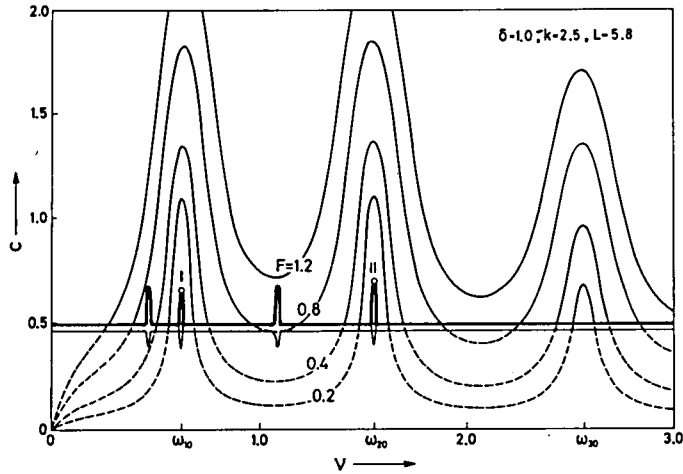


図 5.4 基本調波振動の応答曲線。

としている[†]。シミュレーションでは、この領域に不安定性は観測されなかったので、図 5.4 でも、応答曲線の $c > 1$ なる部分は安定とした。

図 5.5 は、基本調波振動が発生する入力領域を示す。図中の曲線は、図 5.4 における安定限界線に対応する。入力がこの曲線で示される値よりも大きければ、自励成分は同期化または抑制され、系には基本調波振動が生じる。入力がこの値よりも小さければ、一般に、入力成分と自励成分が非同期的に共存する概同期振動が生じる（表 5.2 参照）。

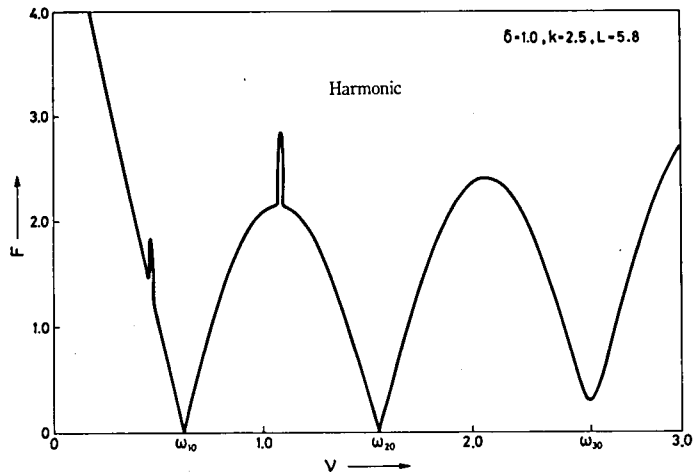


図 5.5 基本調波振動の発生領域。

[†] $c > 1$ に対する $f(v)$ の記述関数は、

$$N(c) = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{c^2 - 1} - \left(\frac{c^2}{2} - 2 \right) \sin^{-1} \frac{1}{c} \right].$$

5.3.2節では、変分系の状態を、 ν の値によって3種類に分類し、個別に安定条件を導いた。非共振として導いた安定条件(5.12)式は、図5.4では、 $\nu = \omega_{10}, \omega_{20}$ と $|\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ の近傍を除く範囲に適用され、安定限界として、 $r_{20}/\sqrt{2} = 0.493$ を与えている。その下方の直線は $r_{10}/\sqrt{2} = 0.463$ を示す。

図5.4に見るように、共振条件がなりたつ $\nu = \omega_{10}, \omega_{20}$ と $|\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ の近傍では、不安定領域が拡大するのが特徴的である。つぎに、それらの細部を調べよう。 $\nu \doteq \omega_{i0}; i=1,2$ の場合の例として、 $\nu = \omega_{10}$ 近傍の応答曲線と基本調波振動の発生領域を、それぞれ図5.6と図5.7に示す。安定限界は(5.16)式から導かれる。○印はハイブリット・シミュレーションによる結果である。 $\nu \doteq |\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ の場合の例として、 $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ 近傍の様子を、図5.8(応答曲線)と図5.9(発生領域)に示す。安定限界は(5.21)式から導かれる。安定限界の下方にある曲線も(5.21)式から得られるので、参考のため記入した。図5.8における安定限界線とその下方の曲線は、 $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ から離れるにつれて、それぞれ $r_{20}/\sqrt{2}$ と $r_{10}/\sqrt{2}$ に漸近する。

以上の各図に見られるように、計算値と実験値がほぼ一致していることは、5.3.1節と5.3.2節における議論が妥当であったことを示している。

以上の結果に対する物理的な解釈、とくに、基本調波振動の安定性に対する物理的な説明は次節で述べる。

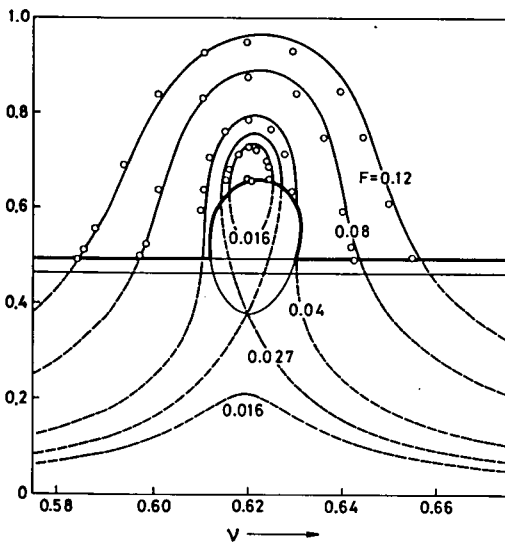


図 5.6 基本調波振動の応答曲線 ($\nu = \omega_{10} = 0.621$ 近傍)。

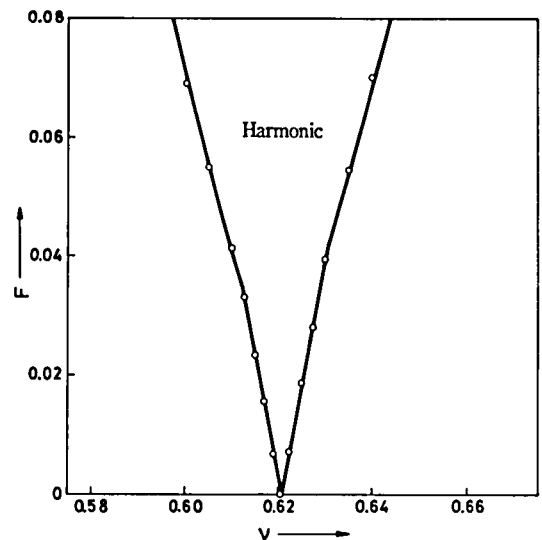


図 5.7 基本調波振動の発生領域 ($\nu = \omega_{10} = 0.621$ 近傍)。

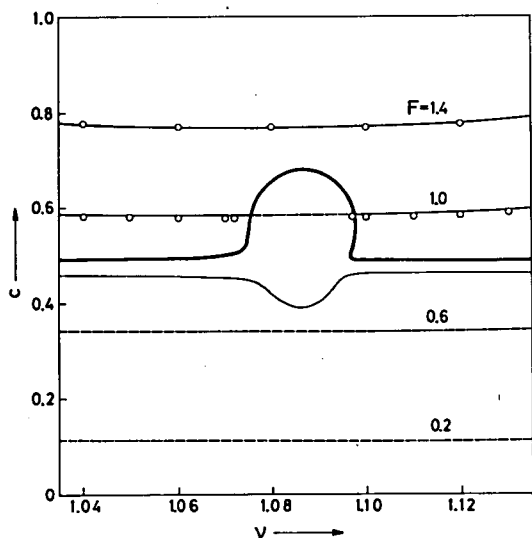


図 5.8 基本調波振動の応答曲線 ($\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2 = 1.086$ 近傍)。

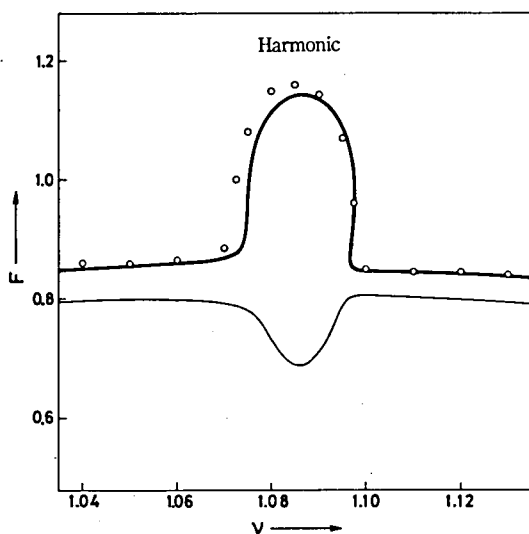


図 5.9 基本調波振動の発生領域 ($\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2 = 1.086$ 近傍)。

5.3.4 増分記述関数による安定性の検討

5.3.2 節では、変分系の状態を、 ν の値によって 3 種類に分類し、個別に安定条件を導いた。物理的に見ても、それぞれの場合で、基本調波振動の不安定化の機構が異なっている。本 5.3.4 節では、飽和要素の増分記述関数を用いて、基本調波振動の不安定化の機構を説明する。

(a) 飽和要素の増分記述関数

一般に、非線形要素の入力が、振幅の大なる正弦波（以下、大信号と言う）と、それに重畳する微小振幅の正弦波（小信号と言う）とからなるとき、後者に対する記述関数はとくに増分記述関数と呼ばれ、定常振動の安定性の検討に有用である。⁽¹⁸⁾⁽⁵³⁾ 本節では、基本調波振動が大信号に、それに重畳する微小変分が小信号に対応する。本(a)項では、飽和要素 $f(v) = v - v^3/3$ ($|v| \leq 1$) の増分記述関数を導くとともに、それを用いて、飽和要素の若干の性質について説明する。

(1) まず、小信号が単一周波数成分である場合を考えよう。すなわち、飽和要素の入力が、

$$\left. \begin{aligned} v &= c \sin \nu t + \xi \sin(\omega_0 t + \phi), \\ \text{ここに、} 1 > c > 0, \text{ かつ、} 1 \gg \xi > 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

であるとする。上式右辺第 1 項が大信号を、第 2 項が小信号を表わす。いま、もし $\omega_0 \neq \nu$ かつ $\omega_0 \neq 3\nu$ ならば、大信号に対する記述関数 $N(c)$ は、

$$N(c) = 1 - c^2/4, \quad (5.24)$$

で与えられ、小信号に対する増分記述関数 $N_i(c)$ は、

$$N_i(c) = 1 - c^2/2, \quad (5.25)$$

で与えられる。(5.24)式と(5.25)式は、小信号の利得は大信号のそれよりも小さいことを示す。この現象は、飽和要素の小信号弁別特性(property of small signal discrimination)として知られている。⁽⁵⁾

(2) (5.23)式において、 $\nu = \omega_0$ とする。この場合の増分記述関数 $N_i(c, \phi)$ は、

$$\left. \begin{aligned} N_i(c, \phi) &= p - qe^{-j2\phi}, \\ \text{ここに、} p &= 1 - c^2/2, \quad q = c^2/4, \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

で与えられる。 ϕ の変化につれて、 $N_i(c, \phi)$ は、複素平面上で、 $(p, 0)$ を中心とする半径 q の円を描く。

(3) 以上の議論を、小信号が2種類の周波数成分からなる場合へ拡張しよう。すなわち、飽和要素の入力が、

$$\left. \begin{aligned} v &= c \sin \nu t + \xi_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \xi_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2), \\ \text{ここに、} 1 &> c > 0, \quad 1 \gg \xi_1, \xi_2 > 0, \quad \text{かつ、} \omega_1, \omega_2 \neq \nu, 3\nu, \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

である場合を考える。もし $|\omega_1 \pm \omega_2| \neq 2\nu$ ならば、2個の小信号間に干渉はなく、小信号に対する増分記述関数はともに(5.25)式で与えられる。

つぎに、(5.27)式において、 $|\omega_1 \pm \omega_2| = 2\nu$ がなりたつとする。ただし、和と差のいずれの場合も同様に議論できるので、以下では $\omega_1 + \omega_2 = 2\nu$ であるとする。さて、飽和要素出力の小信号成分を、 $\eta_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \eta_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$ で表わすとき、 $\text{col.}[\xi_1, \xi_2]$ と $\text{col.}[\eta_1, \eta_2]$ との間に、

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} &= \mathbf{N}_i(c, \phi) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & -qe^{-j\phi} \\ -qe^{-j\phi} & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \\ \text{ここに、} \phi &= \phi_1 + \phi_2, \quad p = 1 - c^2/2, \quad q = c^2/4, \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

がなりたつ。行列 $\mathbf{N}_i(c, \phi)$ がこの場合の増分記述関数である。

(5.27)式において、とくに $\xi_1 = \xi_2$ かつ $\phi = n\pi$ ($n = \text{整数}$) である場合を考えよう。まず、 n が奇数のとき、(5.27)式右辺は位相変調波を表わし、(5.28)式は、大小両信号が飽和要素から同じ利得 $1 - c^2/4$ を得ることを示す。これは、位相変調波の変調度が飽和要素を通過す

る前後で不変である事実に対応している。このように $\omega_1 + \omega_2 = 2\nu$ ($|\omega_1 - \omega_2| = 2\nu$) がなりたつ場合は、2個の小信号の位相間に適当な関係があれば、これら小信号は単一小信号より容易に飽和要素を通過しうる((5.25)式参照)。この現象は飽和要素の3信号効果(three signal effect)として知られている。⁽⁵⁾ つぎに、 $\phi = n\pi$ ($n = \text{偶数}$)なら、(5.27)式右辺は振幅変調波を表わし、(5.28)式は、この場合の小信号の利得が $1 - 3c^2/4$ であることを示す。この値は、(5.25)式で与えられるものより小さい。

(b) 増分記述関数による安定性の検討

(a) 項では、3種類の増分記述関数 $N_i(c)$ 、 $N_i(c, \phi)$ と $N_i(c, \phi)$ を導いた。本(b)項では、5.3.2節(b)項で得た3種類の安定条件が、これらの増分記述関数からも導けることを示す。

(1) $\nu = \omega_{10}, \omega_{20}$ と $|\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ の近傍を除く領域に適用される安定条件(5.12)式は、(5.25)式で与えられる増分記述関数 $N_i(c)$ を用いても導ける。すなわち、 $N_i(c) = 1 - c^2/2$ を用いて、微小変分を支配する系を構成すれば、図5.10に示す系を得る。この系は、図5.1中の破線で囲まれる閉ループに他ならない。従って、この系の特性方程式と安定条件は、それぞれ、(5.9)式と(5.12)式で与えられる。

(5.11)式で与えられる特性根 s_i^* ; $i=1, 2$ から判るように、この領域における基本調波振動の不安定性は、自励振動と同じ周波数をもつ振動成分が励起することによる不安定性と説明される。

より一般的には、この領域における不安定性は、入力による自励振動の非同期抑制の観点から説明されるべきであるが、この点については、後に5.6節(2周波概同期振動)で触れる。

(2) $\nu = \omega_{10}$ と ω_{20} の近傍に適用される安定条件(5.16)式は、(5.26)式で与えられる増分記述関数 $N_i(c, \phi)$ を用いても導ける。(1)と同様に変分系を構成すれば、この系の特性方程式は、

$$1 + G(\Delta s + j\nu)N_i(c, \phi) = 0, \quad (5.29)$$

で与えられる。ただし、 $|\Delta s| \ll 1$ と仮定している。 $O(|\Delta s|^2)$ を無視すれば、(5.29)式は、

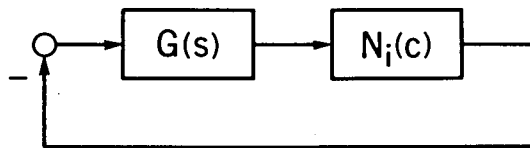


図 5.10 増分記述関数による変分系。

$$\left. \begin{aligned} A_\nu + jB_\nu + [B'_\nu - jA'_\nu]As + N_i(c, \phi) &= 0, \\ \text{ここに, } A_\nu &= A(\nu), \dots, B'_\nu = B'(\nu), \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

と同値であり((5.10)式参照), (5.30)式から ϕ を消去すれば, (5.14)式が得られる。従って, 安定条件は, (5.16)式と一致する。

図5.4と図5.6に見るように, $\nu = \omega_{10}$ と ω_{20} の近傍で不安定領域が隆起する。この隆起部分は $(p + A_\nu)^2 + B_\nu^2 - q^2 < 0$ によって与えられるから, 隆起部分の内部で, (5.29)式の根 As は実数である。((5.14)式参照)。従って, この隆起部分における不安定性は, 基本調波振動と同じ周波数をもつ振動成分が励起することによる不安定性と説明される。

(3) $\nu = |\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ 近傍の安定限界を与える(5.21)式は, (5.28)式で定義される増分記述関数 $N_i(c, \phi)$ を用いても導ける。例えば, $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ なら, 変分系を表わすものとして,

$$\left. \begin{aligned} \left[I + \begin{pmatrix} G(\sigma + j\omega_1) & 0 \\ 0 & G(\sigma + j\omega_2) \end{pmatrix} N_i(c, \phi) \right] \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= 0, \\ \text{ここに, } I : 2 \times 2 \text{ 単位行列, } \omega_1 + \omega_2 &= 2\nu, \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

が得られるが, (5.31)式において $O(\sigma^2)$ を無視し, かつ, ξ_1, ξ_2 と ϕ を消去すれば, (5.20)式と同じ $X(\sigma) = Y(\sigma) = 0$ が得られる。従って, 安定限界は(5.21)式によって与えられる。

従って, 図5.4と図5.8に見るように, $\nu = |\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ の近傍で不安定領域が隆起するが, この隆起部分における基本調波振動の不安定性は, それぞれ ω_{10} と ω_{20} に近い周波数をもつ2振動成分が, 3信号効果によって同時に励起することによる不安定性と説明される。概念的に言えば, 2振動成分が基本調波振動の位相を変調するように重畳するのである。

なお, (5.21)式から得られる安定限界以外の曲線(図5.8と図5.9において, 安定限界の下方にある細線)は, 2振動成分が, 基本調波振動の振幅を変調するように重畳する場合に対応する。

5.4 1/3次分数調波振動

本5.4節では, $\nu = 3\omega_{i0}$; $i = 1, 2$ の近傍で生じる1/3次分数調波振動について考察する。

5.4.1 1/3次分数調波振動の定常応答

系(5.1)に, 1/3次分数調波振動,

$$\left. \begin{aligned} v &= c \sin(\nu t + \varphi_\nu) + r_{1/3} \sin(\nu/3 \cdot t + \varphi_{1/3}), \\ \text{ここに, } |v| &< 1, \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

が持続しているとする。上式右辺の両成分に対する周期性の条件は、

$$\left. \begin{aligned} 1 + G(j\nu)(N_\nu - F/c \cdot e^{-j\varphi_\nu}) &= 0, \\ 1 + G(j\nu/3)N_{1/3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} N_\nu &= 1 - \frac{1}{4}(c^2 + 2r_{1/3}^2) + \frac{1}{12} \cdot \frac{r_{1/3}^3}{c} e^{j\varphi}, \\ N_{1/3} &= 1 - \frac{1}{4}(2c^2 + r_{1/3}^2) + \frac{1}{4} cr_{1/3} e^{-j\varphi}, \\ \varphi &= 3\varphi_{1/3} - \varphi_\nu, \end{aligned} \right\}$$

与えられる。(5.33)式第1式と第2式から、それぞれ φ_ν と φ を消去することにより、次の2式を得る。

$$[\{A_\nu + \text{Real}(N_\nu)\}^2 + \{B_\nu + \text{Imag}(N_\nu)\}^2] c^2 = F^2. \quad (5.34)$$

$$\left. \begin{aligned} [A_{1/3} + 1 - \frac{1}{4}(2c^2 + r_{1/3}^2)]^2 + B_{1/3}^2 &= (\frac{1}{4} cr_{1/3})^2, \\ \text{ここに, } A_{1/3} &= A(\nu/3), \quad B_{1/3} = B(\nu/3). \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

ここで、 $\omega_{20}/\omega_{10} \doteq 3$ ではないと仮定されていることに注意しよう(5.2.1節仮定(2))。この仮定のもとでは、1/3次分数調波振動が生じる入力周波数の領域 $\nu \doteq 3\omega_{i0}$ ； $i = 1, 2$ は、ともに、系(5.1)のいわゆる非共振領域にある。従って、(5.34)式中の分数調波成分 $r_{1/3}$ は近似的に無視してもよく、その結果、(5.34)式は、より簡単な、

$$[(A_\nu + 1 - \frac{1}{4}c^2)^2 + B_\nu^2] c^2 = F^2, \quad (5.36)$$

で置き換えることができる。[†] (5.35)式と(5.36)式から、1/3次分数調波振動の定常応答が決定できる。

5.4.2 安定性の検討

5.3.2節と同様に変分系を構成すれば、やはり、図5.1に示される系を得る。ここに、

[†] 非共振の場合は、(5.34)式を線形近似、すなわち、 $[(A_\nu + 1)^2 + B_\nu^2] c^2 = F^2$ で置き換えるのが通常であるが、ここでは $r_{1/3} \rightarrow 0$ のとき、5.3節(基本調波振動)の結果に一致するよう配慮した。

$$\left. \begin{aligned} p &= 1 - \frac{1}{2}(c^2 + r_{1/3}^2), \\ q &= \frac{1}{2} \left[(cr_{1/3} \cos \varphi - \frac{1}{2}r_{1/3}^2)^2 + (cr_{1/3} \sin \varphi)^2 \right]^{1/2}, \\ \omega &= \frac{\nu}{3} (\doteq \omega_{i0}). \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

ただし、周波数 $4\nu/3$ ($4\nu/3 \doteq 4\omega_{i0}$) と 2ν ($2\nu \doteq 6\omega_{i0}$) の時変係数は、変分系の安定性に大きな影響を及ぼさないので無視した。

変分系の安定条件も、5.3.2 節(b)項(5)と同様に検討できる。結果は、

$$\left. \begin{aligned} (c^2 + r_{1/3}^2)^{1/2} &> \max(r_{10}/\sqrt{2}, r_{20}/\sqrt{2}), \\ \text{かつ,} \\ (p + A_{1/3})^2 + B_{1/3}^2 - q^2 &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

で与えられる。第2の条件が決定する安定限界は、応答曲線 (c 対 $r_{1/3}$ 特性, あるいは ν 対 $r_{1/3}$ 特性) が垂直接線をもつ点に一致する。

5.4.3 数値例

系のパラメータは、 $\delta = 1.0$, $k = 2.5$ および $L = 5.8$ とする。

図 5.11 の太線は、 $\nu = 3\omega_{i0} = 1.863$ における $1/3$ 次分数調波振動の振幅特性 (c 対 $r_{1/3}$ 特性) を描いたものである。○印はシミュレーション結果である。図 5.12 は $1/3$ 次分数調波振動の波形の一例である。その波形解析の結果を、図 5.11 中に●印で示した ($c = 0.33$, $r_{1/3} = 0.66$)。

図 5.11 に見るように、モード 1 自励振動が生じている系に入力を加えると、 $1/3$ 次分数調波振動が得られる。逆にモード 2 自励振動が生じている系に入力を加えると、後に 5.6 節で解析する 2 周波概同期振動が得られる。同図の細線は、後者の振幅特性 (c 対 r_2 特性) を描いたものである。 r_2 が零になる点 $c = 0.493$ は、基本調波振動の安定限界 $c = r_{20}/\sqrt{2}$ と一致する。□印はシミュレーション結果である。

図 5.13 は、 $\nu = 3\omega_{i0} = 1.863$ の近傍において、 $1/3$ 次分数調波振動が発生する入力領域を示す。すなわち、この振動は、同図の太線で囲まれる領域内で生じる。この領域は、(5.38) 式第 2 式で与えられる。○印はシミュレーション結果である。同図の細線は、基本調波振動の安定限界を示す。この付近の安定限界は、 $c = r_{20}/\sqrt{2}$ から決められる。□印はシミュレーション結果である。

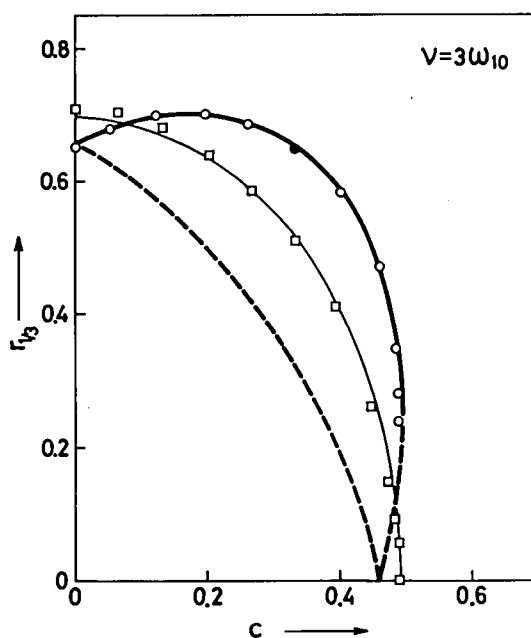


図 5.11 1/3 次分数調波振動の振幅特性（太線）と 2 周波概周期振動の振幅特性（細線）（ $\nu = 3\omega_{10} = 1.863$ ）。

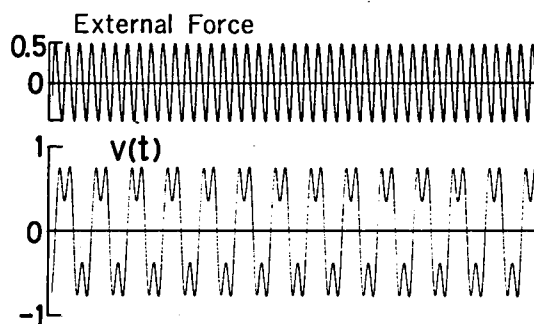


図 5.12 1/3 次分数調波振動の波形の一例。波形解析の結果を図 5.11 に ● 印で示す（ $c = 0.33$, $r_{1/3} = 0.66$ ）。

5.5 3 次高調波振動

本 5.5 節では、 $\nu = \omega_{i0}/3$; $i = 1, 2$ 近傍で生じる 3 次高調波振動について考察する。

5.5.1 3 次高調波振動の定常応答

系 (5.1) に、3 次高調波振動、

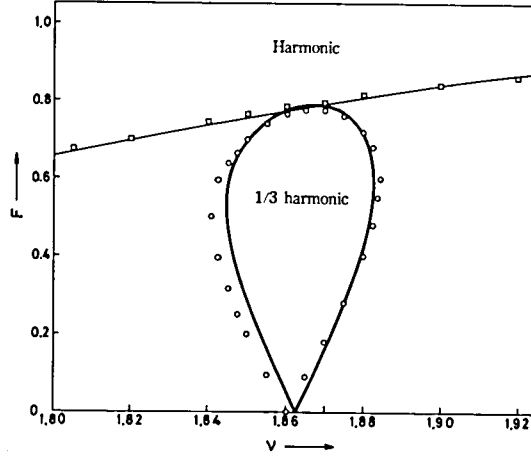


図 5.13 1/3次分数調波振動の発生領域(太線)と基本調波振動の安定限界(細線)($\nu=3\omega_{10}=1.863$ 近傍)。

$$\left. \begin{aligned} \nu &= c \sin(\nu t + \varphi_\nu) + r_3 \sin(3\nu t + \varphi_3), \\ \text{ここに, } |\nu| &< 1, \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

が持続しているとする。 ν 成分と 3ν 成分の周期性の条件は、

$$\left. \begin{aligned} 1 + G(j\nu)(N_\nu - F/c \cdot e^{-j\varphi_\nu}) &= 0, \\ 1 + G(j3\nu)N_3 &= 0, \\ \text{ここに,} \\ N_\nu &= 1 - \frac{1}{4}(c^2 + 2r_3^2) + \frac{1}{4}cr_3e^{j\varphi}, \\ N_3 &= 1 - \frac{1}{4}(2c^2 + r_3^2) + \frac{1}{12}\frac{c^3}{r_3}e^{-j\varphi}, \\ \varphi &= \varphi_3 - 3\varphi_\nu \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

で与えられる。ただし、5.4節と同様に、 N_ν は $1 - c^2/4$ で置き換えることができる。(5.40)式から、

$$\left. \begin{aligned} [(A_\nu + 1 - \frac{1}{4}c^2)^2 + B_\nu^2] c^2 &= F^2, \\ [A_3 + 1 - \frac{1}{4}(2c^2 + r_3^2)]^2 + B_3^2 &= \left(\frac{1}{12} \frac{c^3}{r_3} \right)^2, \\ \text{ここに, } A_3 &= A(3\nu), \quad B_3 = B(3\nu), \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

が得られる。3次高調波振動の定常応答は(5.41)式から決定できる。

5.5.2 安定性の検討

5.3.2節と同様に変分系を構成すれば、やはり、図5.1に示す系を得る。ここに、

$$\left. \begin{aligned} p &= 1 - (c^2 + r_3^2)/2, \quad q = r_3^2/4, \\ \omega &= 3\nu (\doteq \omega_{i0}). \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

ただし、周波数 2ν と 4ν の時変係数は、変分系の安定性に大きな影響を及ぼさないで、無視した。

変分系の安定条件は、5.3.2節(b)項(5)と同様に検討できる。結果は、

$$\left. \begin{aligned} (c^2 + r_3^2)^{1/2} &> \max(r_{10}/\sqrt{2}, r_{20}/\sqrt{2}), \\ \text{かつ,} \\ (p + A_3)^2 + B_3^2 - q^2 &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

で与えられる。第2の条件が決定する安定限界は、応答曲線が垂直接線をもつ点に一致する。

5.5.3 数値例

系(5.1)のパラメータは、 $\delta = 1.0$ 、 $k = 2.5$ および $L = 5.8$ とする。モード1自励振動が生じている系に、 $\nu \doteq \omega_{10}/3 = 0.207$ になる入力を加えると、3次高調波振動が得られる。図5.14の太線は、 $\nu = \omega_{10}/3$ における、3次高調波振動の振幅特性(c 対 r_3 特性)を描いたものである。安定な部分は実線で、不安定な部分は破線で描いた。○印はシミュレーション結果である。図5.15は、3次高調波振動の波形の一例である。波形解析の結果を図5.14に●印で示した($c = 0.34$ 、 $r_3 = 0.44$)。

もし、モード2自励振動が生じている系に、 $\nu \doteq \omega_{10}/3$ なる入力を加えると、表5.2第5項に示す概周期振動が得られる。この振動の主要周波数は、 ν 、 3ν と ω_{20} である。図5.14の細線は、その振幅特性を描いたものである。上方の細線は、 ν 成分対 ω_{20} 成分の関係を、下方の細線は、 ν 成分対 3ν 成分の関係を表わす。振幅特性の計算については6.3.3節を参照のこと。□印はシミュレーション結果である。この振動は安定限界に達した後、跳躍的に3次高調波振動へ移行する。

図5.16の太線は、 $\nu = \omega_{10}/3 = 0.207$ の近傍における、3次高調波振動の安定限界を、 νF 平面上に描いたものである。太線より上方が安定領域である。○印はシミュレーション結果である。同図の破線は、基本調波振動の、 $c = r_{20}/\sqrt{2}$ によって決められる安定限界を仮想的に描いたものである。

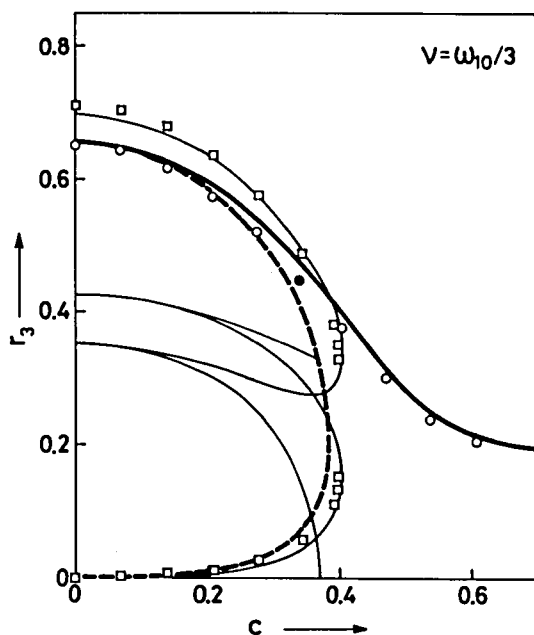


図 5.14 3 次高調波振動の振幅特性（太線）と（ ν , 3ν , ω_{20} ）成分からなる概周期振動の振幅特性（細線）（ $\nu = \omega_{10}/3 = 0.207$ ）。

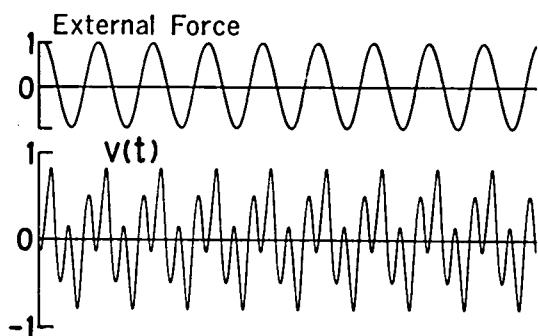


図 5.15 3 次高調波振動の波決の一例。波形解析の結果を図 5.14 に●印で示す（ $c = 0.34$, $r_3 = 0.44$ ）。

5.6 2 周波概周期振動

入力振幅が小さいため、自励振動が同期化、または抑制されるに到らず、入力成分と自励成分が非同期的に共存する状態で表われるのが、表 5.2 第 4 項～第 7 項に示す概周期振動である。これらのうちで、2 個の主要周波数成分からなり、次式、

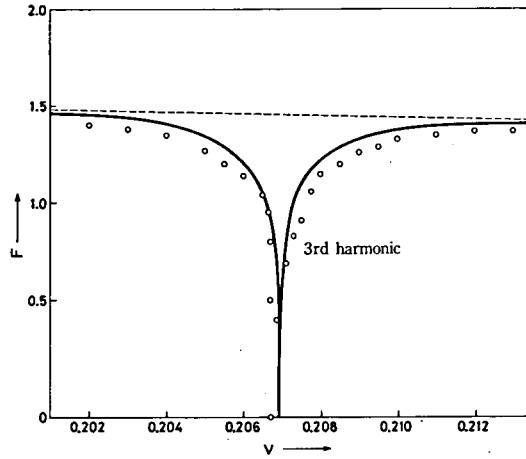


図 5.16 3 次高調波振動の発生領域 ($\nu = \omega_{i0}/3 = 0.207$ 近傍)。

$$\left. \begin{aligned} v &= c \sin(\nu t + \varphi_\nu) + r_i \sin \omega_{i0} t, \\ \text{ここに, } |v| < 1; \quad i &= 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

で表わされる概周期振動を、とくに、2 周波概周期振動と名付けている。系 (5.1) には、2 モードの自励振動が生じると仮定されているので、2 周波概周期振動にも 2 種類の形式がある。本 5.6 節では、2 周波概周期振動の特性を考察する。

5.6.1 2 周波概周期振動の定常応答

(a) 2 周波概周期振動が生じる入力周波数の領域

本 5.6 節では、2 モードの自励振動周波数を、 ω_{i0} と ω_{j0} ($(i, j) = (1, 2)$ か $(2, 1)$) で表わす。

さて、 ν 成分と ω_{i0} 成分のみならず、実際には、これらの高調波 (周波数 3ν と $3\omega_{i0}$)、および混変調波 (周波数 $|2\nu \pm \omega_{i0}|$ と $|\nu \pm 2\omega_{i0}|$) も存在するけれども、高調波と混変調波がともに非共振の状態にあって、無視できる程度に小さい場合を、ここでは、2 周波概周期振動と呼んでいる。

しかるに、入力周波数 ν が、次に示す周波数、

$$\omega_{j0}/3, |\omega_{i0} \pm \omega_{j0}|/2, |2\omega_{i0} \pm \omega_{j0}|/2, \omega_{i0}, 3\omega_{i0}, \omega_{i0}/3, \quad (5.45)$$

の近傍に来れば、上記高調波および混変調波のいずれかの周波数が、 ω_{j0} または ω_{i0} 自身に近づ

き、共振によって、その成分も成長する。表 5.2 第 5 項～第 7 項に示す概周期振動が、このような場合に対応する。

従って、2 周波概周期振動は、(5.45) に示される周波数の近傍を除く入力周波数の全域で現われるものである。ただし、高調波または混変調波が無視できるか、できないかは、相対的な問題であるから、2 周波概周期振動とその他の概周期振動との間に、截然たる境界はない。

(b) 2 周波概周期振動の定常応答

系 (5.1) に、(5.44) 式で表わされる 2 周波概周期振動が持続しているとする。 ν 成分と ω_{i0} 成分に対する周期性の条件は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} 1 + G(j\nu)(N_c - F/c \cdot e^{-j\varphi_\nu}) &= 0, \\ 1 + G(j\omega_{i0})N_r &= 0, \\ \text{ここに,} \\ N_c &= 1 - (c^2 + 2\tau_i^2)/4, \quad N_r = 1 - (2c^2 + \tau_i^2)/4, \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

で与えられる。(5.46) 式から、 c 、 τ_i と φ_ν を定める次の諸式、

$$\left. \begin{aligned} \tau_i^2 + 2c^2 &= \tau_{i0}^2, \\ [(A_\nu + N_c)^2 + B_\nu^2]c^2 &= F^2, \\ \varphi_\nu &= -\tan^{-1} B_\nu / (A_\nu + N_c), \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

を得る。ここに、 τ_{i0} は、モード i 自励振動の振幅を表わす。(5.47) 式から、 c と τ_i は、

$$\tau_{i0}/\sqrt{2} > c > 0, \quad \tau_{i0} > \tau_i > 0, \quad (5.49)$$

の範囲にあることが判る。

5.6.2 安定性の検討

(a) 変分系

2 周波概周期振動に対する変分系を構成すると、図 5.17 に示す、4 個の時変係数 #1～#4 を含む線形系を得る。 ν と ω_{i0} は一般に無理数比であるから、この系は概周期係数系である。破線で囲まれる閉ループを、 $H(s)$ で表わす。

(b) 変分系の安定条件

(1) 5.3.2 節では、図 5.1 に示される変分系の安定問題を、 $H(s)$ のモード周波数 ω_{i0} ; $i = 1, 2$ と、周期係数の周波数 2ν 、との間の関係によって、3 種類の場合に分けて考察した。すなわち、(1) $\nu \doteq \omega_{10}$, ω_{20} と $|\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ のいずれもがなりたたない非共振の場合、(2) $\nu \doteq \omega_{10}$ か ω_{20} がなりたつ共振の場合、(3) $\nu \doteq (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ か $|\omega_{10} - \omega_{20}|/2$ がなりたつ共振の場合、に

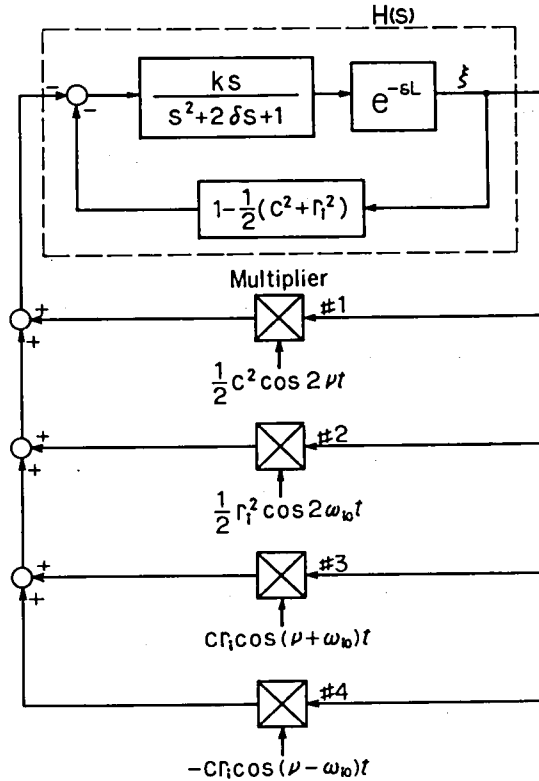


図 5.17 2 周波概周期振動に対する変分系。

分けて、変分系の特性指数 s_1^* と s_2^* を求めた (図 5.2 参照)。

筆者の知る限り、むだ時間を含む線形概周期系の一般理論は、未だ確立されていない。しかしながら、物理的な観点からすれば、図 5.17 で示される変分系においても、上に述べた $H(s)$ と時変係数の周波数との間の共振・非共振の関係が、個々の時変係数ごとになりたつと考えてもよいであろう。

この観点に立てば、図 5.17 で示される変分系の状態は、表 5.3 に示す、3 種類に分類される。同表第 4 欄は、共振条件を満たす時変係数の番号を示し、第 5 欄は、共振の形式が、上記(2)と(3)のいずれに相当するかを示している。

以下、 s_i^* と s_j^* を陽に求めることにより、変分系の安定条件を導出する。

(2) $\nu \equiv |2\omega_{j0} \pm \omega_{i0}|$ と $\nu \equiv \omega_{j0}$ のいずれもがなりたたない場合。まず、 s_i^* を求めよう。

図 5.17 において、時変係数 #1、#3 と #4 を無視すれば、図 5.1 と同様な系が得られる。従って、 s_i^* は、5.3.2 節(b)項(5)と同様に求められる。すなわち、 $s_i^* = j\omega_{i0} + \Delta s$ とするとき、 Δs は、

表 5.3 2 周波概周期振動の変分系における共振条件

項	ν の領域	特性指数	共振条件を満たす 時変係数	共振の形式	安定条件
1	特定でない	s_i^*	# 2	(2)	(5.53) 式
		s_j^*	—	非 共 振	
2	$\nu \doteq 2\omega_{j0} \pm \omega_{i0} $	s_i^*	# 2	(2)	(5.56) 式
		s_j^*	# 3 または # 4	(2)	
3	$\nu \doteq \omega_{j0}$	s_i^*	# 1 ~ # 4	# 1 と # 2 (2)	(5.62) 式
		s_j^*		# 3 と # 4 (3)	

(i, j) = (1, 2) か (2, 1)

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4} r_i^2 H(\Delta s - j\omega_{i0}) \\ \frac{1}{4} r_i^2 H(\Delta s + j\omega_{i0}) & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.50)$$

から求められる。 $|\Delta s| \ll 1$ として、近似式 (5.10) 式を適用すれば、 Δs は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta s &= \frac{1}{2} r_i^2 \frac{B'_{i0}}{(A'_{i0})^2 + (B'_{i0})^2}, \quad \text{および } 0, \\ \text{ここに, } A'_{i0} &= A'(\omega_{i0}), \quad B'_{i0} = B'(\omega_{i0}), \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

と求まる。 $B'(\omega_{i0}) < 0$ であるから、第 1 根は負の実根である。また、 $\Delta s = 0$ ($s_i^* = j\omega_{i0}$) なる根は、 ω_{i0} 成分の位相は一定値に拘束されないと言う物理的事実に由来しているから、2 周波概周期振動の安定性とは無関係である。

一方、 s_j^* は、5.3.2 節(b)項(4)と同様に求められ、結果は、

$$s_j^* = j\omega_{j0} + \frac{1}{4} (2c^2 + 2r_i^2 - r_{j0}^2) \frac{B'_{j0} + jA'_{j0}}{(A'_{j0})^2 + (B'_{j0})^2}, \quad (5.52)$$

で与えられる。

以上を総合することにより、この場合の安定条件は、

$$(c^2 + r_i^2)^{1/2} > r_{j0}/\sqrt{2}, \quad (5.53)$$

で与えられる。(5.47)式と(5.53)式から、安定限界における c と r_i の値は、それぞれ、

$$c = (r_{i0}^2 - r_{j0}^2/2)^{1/2}, \quad r_i = (r_{j0}^2 - r_{i0}^2)^{1/2}, \quad (5.54)$$

で与えられる。従って、 $r_{j0} > r_{i0}$ の場合に限り、ここで検討した安定限界が現われる。

(3) $\nu \doteq |2\omega_{j0} \pm \omega_{i0}|$ の場合、 $\nu \doteq 2\omega_{j0} - \omega_{i0}$ の場合を検討するが、他の場合も以下と同様である。

s_i^* は、上記(2)で検討したとうりである。他方、 s_j^* については、 $s_j^* = j(\nu + \omega_{i0})/2 + \Delta s$ とするとき、 Δs は上記(2)と同様に、次式、

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} cr_i H(\Delta s - j(\nu + \omega_{i0})/2) \\ \frac{1}{2} cr_i H(\Delta s + j(\nu + \omega_{i0})/2) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.55)$$

から求められる。 $|\Delta s| \ll 1$ として、近似式(5.10)式を適用すれば、 $\text{Real}(\Delta s) < 0$ なるための条件として、

$$\left. \begin{aligned} (c^2 + r_i^2)^{1/2} &> r_{j0}/\sqrt{2}, \\ [1 - (c^2 + r_i^2)/2 + A]^2 + B^2 - (cr_i/2)^2 &> 0, \\ \text{ここに、} A &= A((\nu + \omega_{i0})/2), B = B((\nu + \omega_{i0})/2), \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

を得る。結局、この場合の安定条件は、(5.56)式で与えられる。

(4) $\nu \doteq \omega_{j0}$ の場合。表5.3第3項に見るように、この場合は、4個の時変係数の周波数がすべて共振条件を満たし、しかも、共振の形式が混合している。このような状況のもとで s_i^* と s_j^* を求めるには、

$$s_i^* = j\omega_{i0} + \Delta s, \quad s_j^* = j\nu + \Delta s, \quad (5.57)$$

とし、 Δs は、

$$\xi = e^{\Delta s^* t} (\rho_1 e^{j\nu t} + \rho_{-1} e^{-j\nu t} + \rho_2 e^{j\omega_{i0} t} + \rho_{-2} e^{-j\omega_{i0} t}), \quad (5.58)$$

が変分系の解となるように決めるのが妥当であると考えられる。変分系の安定性は Δs の実部によって決まる。

(5.58)式を変分系に代入し、 $e^{\pm j\nu t}$ と $e^{\pm j\omega_{i0} t}$ の係数をそれぞれ零と置けば、1個の同次線形連立方程式を得る。 Δs は、その係数行列の行列式が零であると言う条件、すなわち、

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{H(As + j\nu)} & \frac{1}{4}c^2 & -\frac{1}{2}cr_i & \frac{1}{2}cr_i \\ \frac{1}{4}c^2 & \frac{1}{H(As - j\nu)} & \frac{1}{2}cr_i & -\frac{1}{2}cr_i \\ -\frac{1}{2}cr_i & \frac{1}{2}cr_i & \frac{1}{H(As + j\omega_{i0})} & \frac{1}{4}r_i^2 \\ \frac{1}{2}cr_i & -\frac{1}{2}cr_i & \frac{1}{4}r_i^2 & \frac{1}{H(As - j\omega_{i0})} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.59)$$

から決められる。

(5.59) 式に, $|As| \ll 1$ として, 近似式 (5.10) 式を適用すれば,

$$\det \begin{pmatrix} B'_\nu As + A_\nu + D_1 & A'_\nu As - B_\nu & -cr_i & 0 \\ -A'_\nu As + B_\nu & B'_\nu As + A_\nu + D_2 & 0 & 0 \\ -cr_i & 0 & B'_{i0} As + A_{i0} + D_3 & A'_{i0} As \\ 0 & 0 & -A'_{i0} As & B'_{i0} As \end{pmatrix} = 0 \quad (5.60)$$

ここに, $D_1 = 1 - \frac{3}{4}c^2 - \frac{1}{2}r_i^2$

$D_2 = 1 - \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}r_i^2$

$D_3 = 1 - \frac{1}{2}c^2 - \frac{3}{4}r_i^2$

が得られる。さらに, (5.60) 式を展開することにより,

$$As \cdot [(As)^3 + P(As)^2 + QAs + R] = 0, \quad (5.61)$$

なる形の式が得られる。 $As = 0$ なる根の物理的意味は(2)で触れたとおりであるから, この場合の安定条件は, Routh-Hurwitz 判定法によって,

$$P > 0, \quad R > 0, \quad PQ - R > 0, \quad (5.62)$$

で与えられる。なお, 応答曲線が垂直接線をもつ点で, $R = 0$ となることに注意しよう。

5.6.3 数値例

系 (5.1) のパラメータは, $\delta = 1.0$, $k = 2.5$ と $L = 5.8$ とする。このとき, 2 個の発振モードが存在するから (表 5.1 参照), それに応じて, 2 種類の形式の 2 周波概周期振動が生じる。両者の区別のため, 自励成分が $r_1 \sin \omega_{i0} t$ であるものを I 型の 2 周波概周期振動, これに対し,

$r_2 \sin \omega_{20} t$ であるものをⅡ型の2周波概周期振動と呼ぶ。

図 5.18 は、Ⅰ型の2周波概周期振動の応答曲線を示す。 ν 対 c 特性 (上図) 中の3本の水平直線は、上から、基本調波振動の安定限界： $c = r_{20}/\sqrt{2} = 0.493$ ((5.12)式参照)，Ⅰ型の2周波概周期振動の存在限界： $c = r_{10}/\sqrt{2} = 0.463$ ((5.49)式)，およびその安定限界： $(r_{10}^2 - r_{20}^2/2)^{1/2} = 0.432$ ((5.54)式)を示している。最上方の直線は、Ⅱ型の2周波概周期振動の存在限界でもある((5.49)式)。 ν 対 r_1 特性 (下図) 中の水平直線は、安定限界： $r_1 = (r_{20}^2 - r_{10}^2)^{1/2} = 0.238$ ((5.54)式)を示す。応答曲線の不安定な部分は破線で描いた。○印はシミュレーション結果である。入力成分 c については、定常応答と安定限界とも、計算値と実験値はよく一致している。しかし、自励成分 r_1 については、実験値の方が若干小さい。この傾向は以下の各図でも見られるが、混変調波の影響のためと思われる。

5.6.2節では、2周波概周期振動の安定性を、表 5.3 に示す3種の場合に分けて検討した。各場合の数値例を以下に示そう。

まず、表 5.3 第1項に対応する数値例として、 $\nu = 1.7$ におけるⅠ型とⅡ型の2周波概周期振動の振幅特性を、図 5.19 に示す。2本の直線は、(5.47)式で与えられる振幅特性を示す。Ⅱ型の2周波概周期振動は、 r_2 が零になり、基本調波振動へ移行するまで安定に持続するが、Ⅰ型の2周波概周期振動は $c^2 = r_{10}^2 - r_{20}^2/2 = 0.186$ と $r_1^2 = r_{20}^2 - r_{10}^2 = 0.057$ で安定限界に

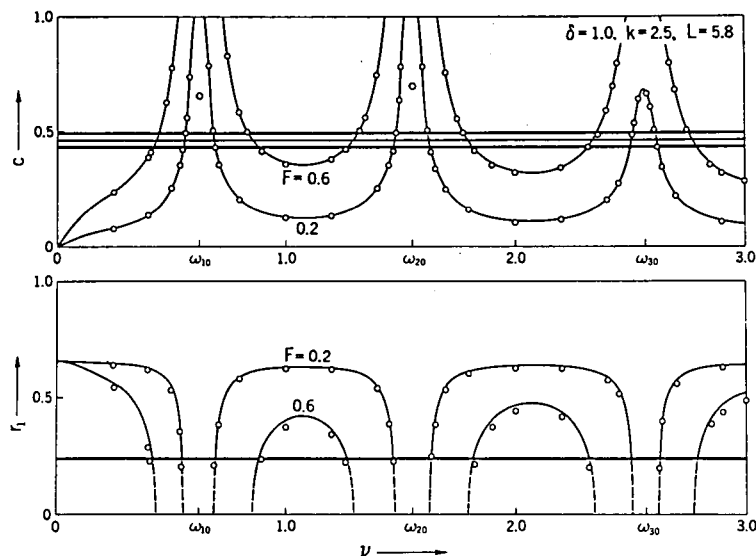


図 5.18 Ⅰ型の2周波概周期振動の応答曲線。 $c > 0.493$ なる部分は基本調波振動の応答特性である。

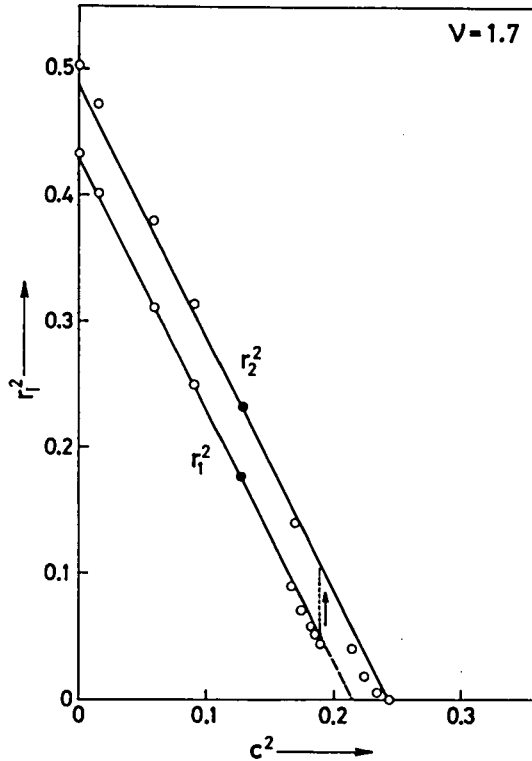


図 5.19 2 周波概周期振動の振幅特性
($\nu = 1.7$)。

達し((5.54)式), II型のそれへ移行する。○印は実験結果である。

図 5.19 は, 入力信号による, 自励振動の非同期抑制の過程を示すものである。すなわち, モード 2 自励振動に関して云えば, この振動は, $c^2 = r_{20}^2/2 = 0.243$ を境にして, $c^2 < 0.243$ なら発振し, $c^2 > 0.243$ なら抑制されると解釈される。これを, 基本調波振動の立場から見れば, $c^2 < 0.243$ なら不安定, $c^2 > 0.243$ なら安定, と云うことになる。

2 周波概周期振動の波形の一例 ($F = 0.3$, $\nu = 1.7$) を図 5.20 に示す。同図(a)が I 型に (b) が II 型に対応する。波形解析の結果を, 図 5.19 に ●印で示した。

つぎに, 表 5.3 第 2 項に対応する数値例として, $\nu = 2\omega_{20} - \omega_{10} = 2.482$ 付近における, I 型の 2 周波概周期振動の特性を, 図 5.21 と図 5.22 に示す。図 5.21 はシミュレーションによる応答曲線を描いたものであり, 図 5.22 は安定限界曲線を νF 平面上に描いたものである。両図における安定限界線(太線)は(5.56)式から求めた。ただし, 図 5.21 の $c > 0.493$ の部分, および図 5.22 の上方の安定限界曲線は基本調波振動に関するものである。この付近において,

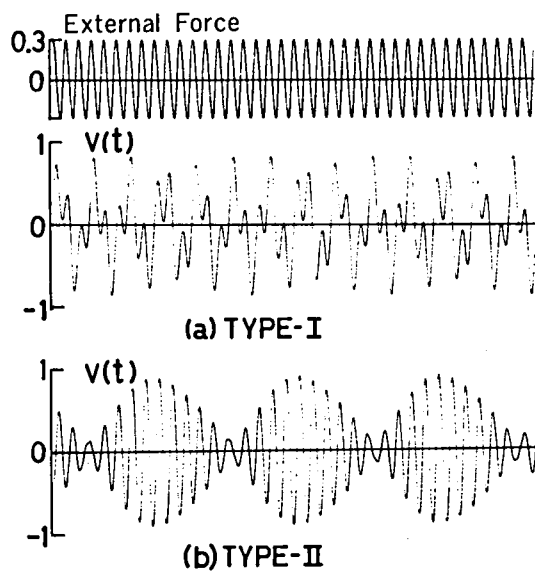


図 5.20 2 周波概周期振動の波形の一例 ($\nu = 1.7$)。
 波形解析の結果を図 5.19 に・印で示す。
 (a) I 型, $c = 0.35$, $\tau_1 = 0.42$ 。
 (b) II 型, $c = 0.35$, $\tau_2 = 0.49$ 。

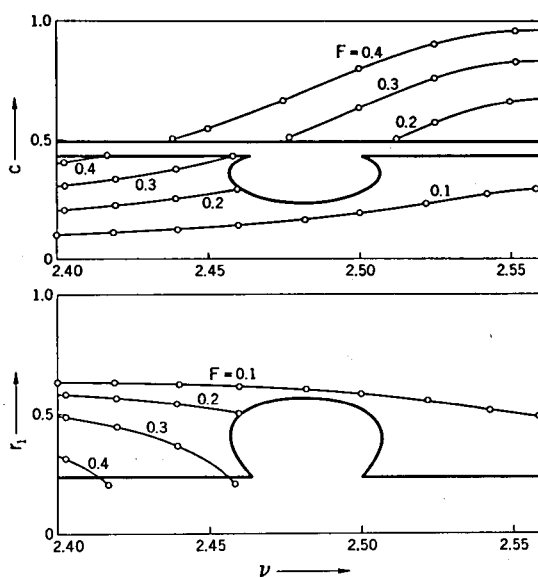


図 5.21 I 型の 2 周波概周期振動の応答曲線 (シミュレーション) と安定限界 (計算値) ($\nu = 2\omega_{20} - \omega_{10} = 2.482$ 近傍)。

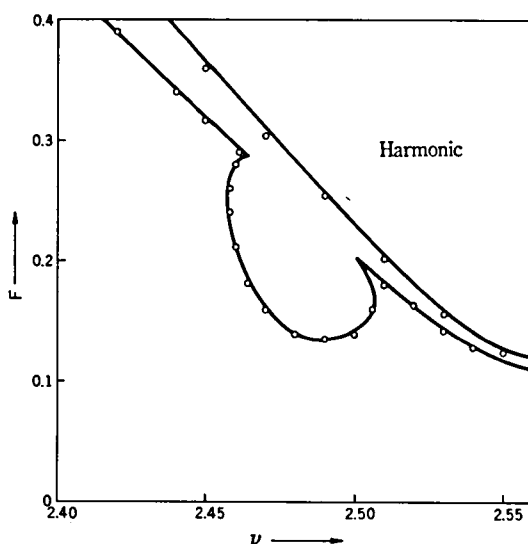
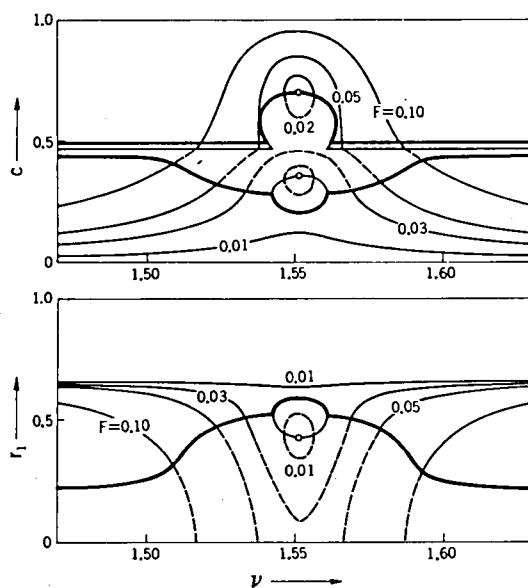


図 5.22 I 型の 2 周波概周期振動の安定限界 (下方の曲線) と基本調波振動の安定限界 (上方の曲線) ($\nu = 2\omega_{20} - \omega_{10} = 2.482$ 近傍)。

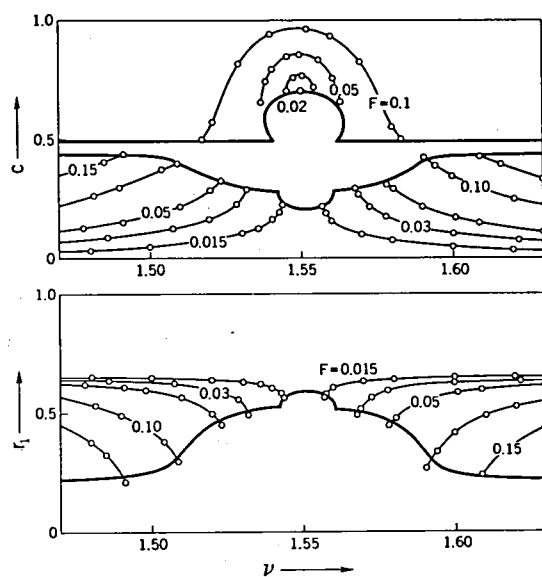
くに拡大するのが特徴的である。図 5.22 の欠損内に入力を選ぶと、表 5.2 第 6 項下段に示す形式の 3 周波概周期振動が生じる。

最後に、表 5.3 第 3 項に対応する数値例として、 $\nu = \omega_{20} = 1.552$ 近傍における I 型の 2 周波概周期振動の特性を、図 5.23 と図 5.24 に示す。図 5.23 (a) は応答曲線の計算値を示したものであり、図 5.23 (b) はそれに対応する実験結果である。両図に見るように、この付近において、I 型の 2 周波概周期振動の不安定領域は大きく広がる。図 5.24 の下方の曲線は、I 型の 2 周波概周期振動の安定限界を νF 平面に描いたものである。この曲線より下方でこの振動は安定である。上方の曲線は基本調波振動の安定限界である。I 型の 2 周波概周期振動が安定限界に達した後、 ν が ω_{20} に極めて近ければ基本調波振動が、そうでなければ、表 5.2 第 7 項に示す形式の概周期振動が生じる。

図 5.24 の $\nu = 1.59$ 付近において、計算値と実験値の間に差が見られる。この原因は、モード周波数 ω_{30} の影響による。すなわち、混変調波周波数の 1 つ $2\nu - \omega_{10}$ が ω_{30} の近傍にあるため ($\omega_{10} + \omega_{30} = 1.59 \times 2$, 表 5.1 参照), この混変調波成分が成長することによる影響である。従って、より精密な解析では、この成分も考慮に入れなければならない。すなわち、表 5.2 第 6 項に示す 3 周波概周期振動としての取り扱いが必要である。



(a) 計算値



(b) シミュレーション

図 5.23 I 型の 2 周波概周期振動の応答曲線
($\nu = \omega_{20} = 1.552$ 近傍)。

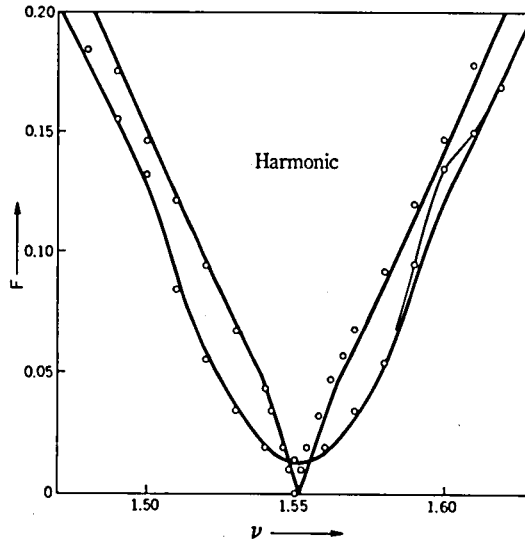


図 5.24 1 型の 2 周波概周期振動の安定限界 (下方の曲線) と基本調波振動の安定限界 (上方の曲線) ($\nu = \omega_{20} = 1.552$ 近傍)。

5.7 3 周波概周期振動

本 5.7 節では、表 5.2 第 6 項に示す 3 周波概周期振動を解析する。同表に示すように、3 周波概周期振動は、 $\nu \doteq |\omega_{10} \pm \omega_{20}|/2$ と $\nu \doteq |2\omega_{10} \pm \omega_{j0}|$; $(i, j) = (1, 2)$ と $(2, 1)$ において生じるが、解析はいずれも同様であるので、本節ではとくに、 $\nu \doteq (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ において生じる 3 周波概周期振動を考察の対象とする。図 5.4 と図 5.5 などを見たように、 $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2 = 1.086$ の近傍で、基本調波振動の不安定領域がとくに拡大する。5.3.4 節において、この付近における基本調波振動の不安定性は、それぞれ ω_{10} と ω_{20} に近い周波数をもつ 2 振動成分が、飽和要素の 3 信号効果によって、同時に励起することによる、と説明した。本節で検討する 3 周波概周期振動は、これら 2 個の励起成分が、有限の振幅にまで成長した後の状態である。

5.7.1 3 周波概周期振動の定常応答

$\nu \doteq (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ における 3 周波概周期振動は、

$$\left. \begin{aligned} v &= c \sin(\nu t + \varphi_\nu) + r_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + r_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \text{ここに, } \omega_1 + \omega_2 &= 2\nu, \quad \omega_1 \doteq \omega_{10}, \quad \omega_2 \doteq \omega_{20}, \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

と表わされる。(5.63)式右辺の各成分に対する周期性の条件は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned}
 1 + G(j\nu)(N_\nu - F/c \cdot e^{-j\varphi_\nu}) &= 0, \\
 1 + G(j\omega_1)N_1 &= 0, \\
 1 + G(j\omega_2)N_2 &= 0, \\
 \text{ここに,} \\
 N_\nu &= 1 - \frac{1}{4}(c^2 + 2r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1}{2}r_1r_2e^{j\varphi}, \\
 N_1 &= 1 - \frac{1}{4}(2c^2 + r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1}{4}c^2\frac{r_2}{r_1}e^{-j\varphi}, \\
 N_2 &= 1 - \frac{1}{4}(2c^2 + 2r_1^2 + r_2^2) - \frac{1}{4}c^2\frac{r_1}{r_2}e^{-j\varphi}, \\
 \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_\nu
 \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

で与えられる。ただし、 $\nu \doteq (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ は、系(5.1)のいわゆる非共振領域にあるから、5.4節などと同様に、 N_ν は $1 - c^2/4$ で近似するものとする。(5.64)式第2式と第3式を、実部と虚部に分離すれば、次の諸式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 + 1 - \frac{1}{4}(2c^2 + r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1}{4}c^2\frac{r_2}{r_1}\cos\varphi &= 0, \\
 B_1 + \frac{1}{4}c^2\frac{r_2}{r_1}\sin\varphi &= 0, \\
 A_2 + 1 - \frac{1}{4}(2c^2 + 2r_1^2 + r_2^2) - \frac{1}{4}c^2\frac{r_1}{r_2}\cos\varphi &= 0, \\
 B_2 + \frac{1}{4}c^2\frac{r_1}{r_2}\sin\varphi &= 0, \\
 \text{ここに, } A_i &= A(\omega_i), \quad B_i = B(\omega_i); \quad i = 1, 2.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.65)$$

結局、 F と ν が与えられれば、(5.64)式第1式から c が決まり、(5.65)式と $\omega_1 + \omega_2 = 2\nu$ から、 $r_1, r_2, \omega_1, \omega_2$ と φ が決まる。

いま、とくに、2モードの自励振動振幅が等しく ($r_{10} = r_{20} = r_0$)、かつ、 $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ の場合を考えよう。このときは、 $\omega_1 = \omega_{10}$ 、 $\omega_2 = \omega_{20}$ であり、(5.65)式から得られる振幅特性は図5.25の太線で示されるようになる。

図において、

$$\left. \begin{aligned}
 \overline{AB}: r_1^2 = r_2^2 &= (r_0^2 - c^2)/3, \quad \varphi = \pm\pi, \\
 \overline{AC}: r_1^2 = r_2^2 &= (r_0^2 - 3c^2)/3, \quad \varphi = 0, \\
 \widehat{DE}, \widehat{EF}: r_1^2 + r_2^2 &= r_0^2 - 2c^2, \quad r_1r_2 = c^2, \quad \varphi = \pm\pi,
 \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

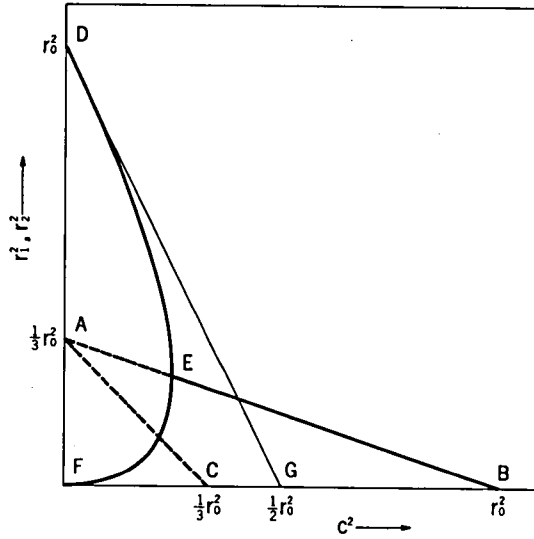


図 5.25 3 周波概周期振動の振幅特性。ただし，
 $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ ， $r_{10} = r_{20} = r_0$ 。

であり，実線は定常状態が安定であることを，破線は不安定であることを示す（安定性の検討は次節で行う）。 c が小さい間は， \widehat{DE} と \widehat{EF} に対応して，2 種類の 3 周波概周期振動が存在するが， E 点で両者は合致する。 c が r_0 に近ければ r_1 と r_2 ($r_1 = r_2$) は小さく，また $\varphi = \pm \pi$ であるから，3 周波概周期振動の波形は位相変調波に近い。 B 点で自励成分は抑制され，系の状態は基本調波振動へ移行する。参考のため，5.6 節で考察した，2 周波概周期振動の振幅特性 \overline{DG} をも記入した（(5.47) 式と図 5.19 参照）。2 周波概周期振動では，自励成分は G 点で抑制される。従って， $\nu \equiv (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ では，他の ν の区域に比べて，基本調波振動の安定領域が狭くなる。これが，図 5.4 などにおいて，基本調波振動の安定領域が，この付近でとくに侵食される現象に対応する。なお， \overline{AC} 上では，振動波形は振幅変調波である。

実際に，位相変調波に近い振動が生じることを，図 5.26 に示す。系のパラメータは， $r_{10} = r_{20}$ なる条件が満されるように選んでいる。一見，基本調波振動のようであるけれども，波形解析の結果によれば， $c = 0.65$ ， $r_1 = r_2 = 0.13$ であり，搬送波と側帯波の振幅比率は 0.2 となっている。

5.7.2 安定性の検討

3 周波概周期振動に対する変分系を構成すれば，図 5.27 に示す線形概周期系を得る。ここに，利得定数 p は，

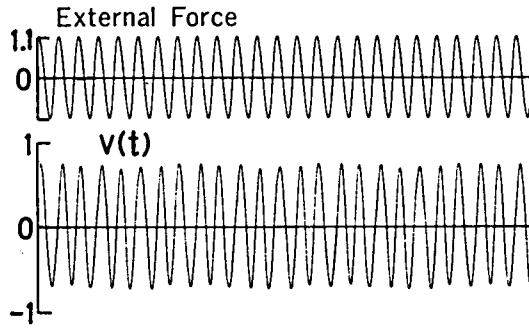


図 5.26 3 周波概周期振動の波形の一例 ($L=5.64$, $\nu=1.112$, $F=1.1$)。波形解析の結果は $c=0.65$, $r_1=r_2=0.13$ である。

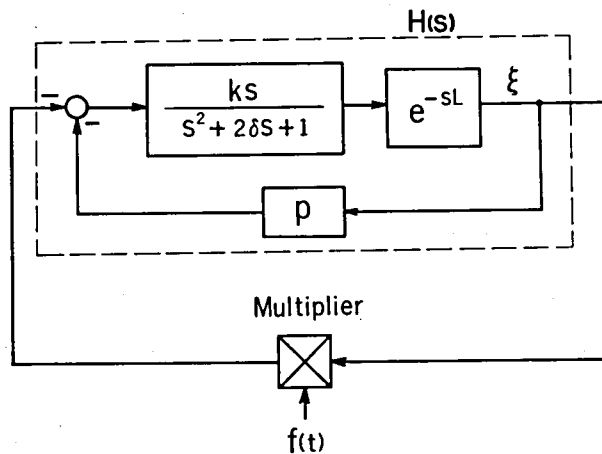


図 5.27 3 周波概周期振動に対する変分系。

$$p = 1 - \frac{1}{2}(c^2 + r_1^2 + r_2^2), \quad (5.67)$$

であり，時変係数 $f(t)$ は，

$$\left. \begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2}c^2 \cos 2\nu t + r_1 r_2 \cos(2\nu t + \varphi) \\ & + \frac{1}{2}r_1^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{2}r_2^2 \cos(2\omega_2 t + 2\varphi) \\ & - r_1 r_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t - \varphi], \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

で与えられる。ただし，後者において，周波数 $|\nu \pm \omega_1|$ と $|\nu \pm \omega_2|$ をもつ時変係数は，変分

系の安定性に大きい影響を及ぼさないので無視した。

さて、図 5.28 に示すように、(5.68) 式で与えられる時変係数の周波数配置 (同図 (b) の点線) は、5.6.2 節 (b) 項 (4) で検討した 2 周波概周期振動に対する変分系のそれ (同図 (a) の点線) に類似している。従って、(5.58) 式に対応して、 ξ の近似解を、

$$\xi = e^{As \cdot t} (\rho_1 e^{j\omega_1 t} + \rho_{-1} e^{-j\omega_1 t} + \rho_2 e^{j\omega_2 t} + \rho_{-2} e^{-j\omega_2 t}), \quad (5.69)$$

で与え、 As の実部の正負によって、図 5.27 に示される変分系の安定性を判定するのが妥当であると考えられる。

(5.69) 式を変分系に代入し、 $e^{\pm j\omega_1 t}$ と $e^{\pm j\omega_2 t}$ の係数をそれぞれ零と置けば、1 個の同次線形連立方程式が得られる。 As はその係数行列の行列式が零である条件、すなわち、

$$\det \begin{bmatrix} \frac{1}{H(As + j\omega_1)} & \frac{1}{4} r_1^2 & -\frac{1}{2} r_1 r_2 e^{-j\varphi} & \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 e^{j\varphi} \\ \frac{1}{4} r_1^2 & \frac{1}{H(As - j\omega_1)} & \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 e^{-j\varphi} & -\frac{1}{2} r_1 r_2 e^{j\varphi} \\ -\frac{1}{2} r_1 r_2 e^{j\varphi} & \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 e^{j\varphi} & \frac{1}{H(As + j\omega_2)} & \frac{1}{4} r_2^2 e^{j2\varphi} \\ \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{2} r_1 r_2 e^{-j\varphi} & -\frac{1}{2} r_1 r_2 e^{-j\varphi} & \frac{1}{4} r_2^2 e^{-j2\varphi} & \frac{1}{H(As - j\omega_2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.70)$$

から決められる。

$|As| \ll 1$ として、(5.70) 式に近似式 (5.10) 式を適用すれば、

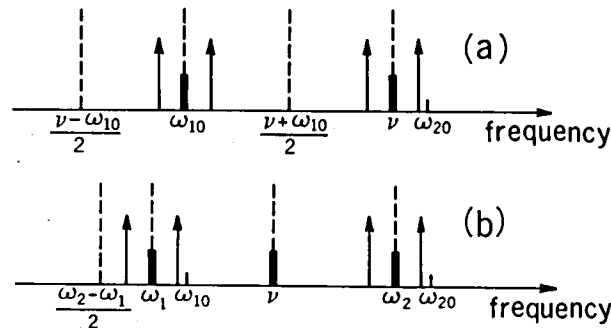


図 5.28 時変係数の周波数配置。
(a) 2 周波概周期振動の場合。
(b) 3 周波概周期振動の場合。

$$\left[\begin{array}{cccc}
B'_1 \Delta s + A_1 + D_{-1} & A'_1 \Delta s - B_1 & -r_1 r_2 - \frac{1}{4} c^2 \cos \varphi & \frac{1}{4} c^2 \sin \varphi \\
-A'_1 \Delta s + B_1 & B'_1 \Delta s + A_1 + D_1 & \frac{1}{4} c^2 \sin \varphi & \frac{1}{4} c^2 \cos \varphi \\
-r_1 r_2 - \frac{1}{4} c^2 \cos \varphi & \frac{1}{4} c^2 \sin \varphi & B'_2 \Delta s + A_2 + D_{-2} & A'_2 \Delta s - B_2 \\
\frac{1}{4} c^2 \sin \varphi & \frac{1}{4} c^2 \cos \varphi & -A'_2 \Delta s + B_2 & B'_2 \Delta s + A_2 + D_2
\end{array} \right] = 0,$$

ここに, $A'_i = A'(\omega_i)$, $B'_i = B'(\omega_i)$,

$D_{\pm i} = p \pm \frac{1}{4} r_i^2$; $i = 1, 2$,

(5.71)

が得られる。(5.71)式は、さらに次の形、

$$\Delta s [(\Delta s)^3 + P(\Delta s)^2 + Q\Delta s + R] = 0, \quad (5.72)$$

に展開される。 $\Delta s = 0$ なる根の物理的意味は、5.6.2節(b)項(2)で触れたとおりである。従って、結局、3周波概周期振動の安定条件は、Routh-Hurwitz 判定法によって、

$$P > 0, \quad R > 0, \quad PQ - R > 0, \quad (5.73)$$

で与えられる。なお、応答曲線が垂直接線をもつ点で、 $R = 0$ となることに注意しよう。

5.7.3 数値例

系のパラメータは、 $\delta = 1.0$, $k = 2.5$ と $L = 5.8$ とする。2個の発振モードの周波数と振幅は、表5.1に与えられている。以下では、 ν が ω_{10} と ω_{20} の中間1.086に近い場合に生じる3周波概周期振動を例にとる。

同一入力に対しても、初期条件によって、一般に2種類の異なる3周波概周期振動が生じる。すなわち、モード1自励振動が生じている系に入力を加える場合と、モード2自励振動が生じている系に入力を加える場合とでは、一般に異なる3周波概周期振動が現われる。そこで、本節では、前者をⅠ型の3周波概周期振動、後者をⅡ型の3周波概周期振動と呼んで区別する。なお、以下の各図において、実線と破線は計算値を示し、前者は定常応答が安定であることを、後者は不安定であることを示す。また、○、△、□印はシミュレーションの結果を表わし、△印はⅠ型の振動、□印はⅡ型の振動にそれぞれ対応する。

図5.29は、 $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2 = 1.086$ における、 c 対 r_1 特性と c 対 r_2 特性を示す。 c が大きくなると、Ⅰ型の3周波概周期振動は、特性曲線が垂直接線をもつ点で安定限界に達し、Ⅱ型の振動と入れ替る。Ⅱ型の3周波概周期振動は、自励成分が抑制されるまで安定である。抑

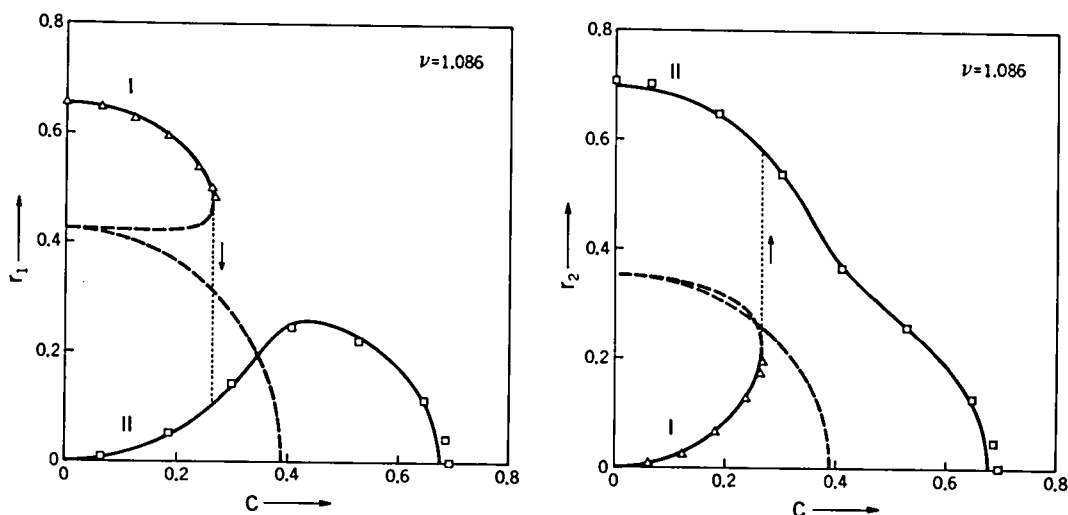


図 5.29 3 周波概周期振動の振幅特性 ($\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2 = 1.086$)。

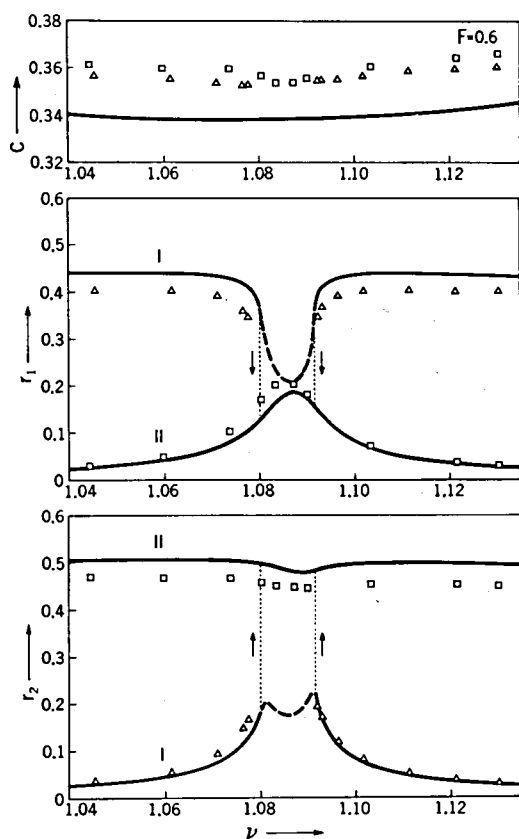
制される以前において、 r_1 と r_2 がほぼ等しくなる様子が判る (図 5.25 参照)。

図 5.30 は $F = 0.6$ に対する応答曲線である。図の両端付近では、 ν 成分と ω_{10} 成分 (I 型)、または ν 成分と ω_{20} 成分 (II 型) の 2 周波概周期振動のようであるが、 ν が中央 1.086 に近づくにつれて、混変調波の 1 つが共振によって成長してくる。また、その際、もとの自励成分の周波数も、それぞれ ω_{10} と ω_{20} から若干変化する。このように、2 周波概周期振動と 3 周波概周期振動との間に、明確な境界はない。I 型の 3 周波概周期振動は $1.080 < \nu < 1.092$ では不安定、II 型の振動は常に安定である。 ω_1 と ω_2 に関する図中の 2 本の水平細線は ω_{10} と ω_{20} の計算値 (実線) と実験値 (一点鎖線) を示す。なお、 c の実験値が計算値にほぼ等しいこと、 r_1 と r_2 が変化しても c がほぼ一定値を保つことは、5.7.1 節で述べた非共振の仮定が妥当であったことを裏付けている。

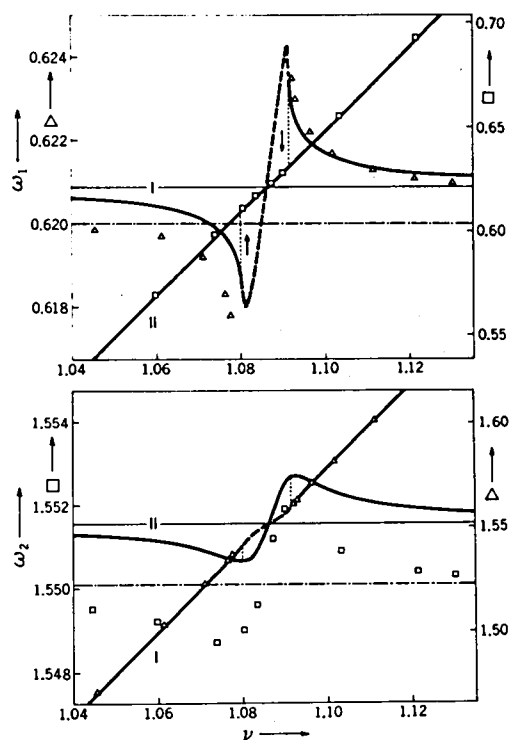
図 5.31 は、2 種類の 3 周波概周期振動が安定に生じる入力領域を示す。II 型の振動は上側太線の下部全体で生じる。この境界は、自励成分が抑制される境界に一致し、基本調波振動の安定限界の一部として既に得たものである (図 5.9 参照)。一方、I 型の振動は下側太線の下部でのみ安定である。なお、上下の両境界線は中心から遠ざかるにつれて、前者は (5.12) 式で決められる境界に、後者は (5.53) 式で決められる境界にそれぞれ近づく。

5.8 考 察

以上の各節では、2 モードの自励振動が存在するとの仮定のもとで、系 (5.1) における強



(a) 振 幅



(b) 周波数

図 5.30 3 周波概周期振動の応答曲線 ($F = 0.6$)。

制振動の定常応答とその安定性を検討した。また、数種の現象については、その物理的意味をも明らかにした。前章と本章の諸結果を総合すれば、系 (5.1) の振動系としての性質は、次のように要約される。すなわち“系 (5.1) は見掛けは 1 自由度系であるけれども、むだ時間が多モード系 (多自由度系と云ってもよい) としての性格を与え、飽和と云う非線形性を介して、各モードと入力の上に相互作用が生じ、相互作用の結果として、同期、抑制およびパラメータ励振効果による不安定性などの諸現象が生じる。”

より具体的に云えば、本章に得られた諸結果は、系 (5.1) が図 5.32 に示す多重ループ系 (多自由度系) と等価であると考えれば、理解しやすい。図 5.32 における 2 個の同調要素は 2 モードの自励振動に対応するものであり、その中心周波数と中心利得は、それぞれ ω_{i0} と $|G(j\omega_{i0})|$; $i = 1, 2$ である。自励振動のモード数が 3 以上なら、それに応じて、同調要素の個数を増せばよい。

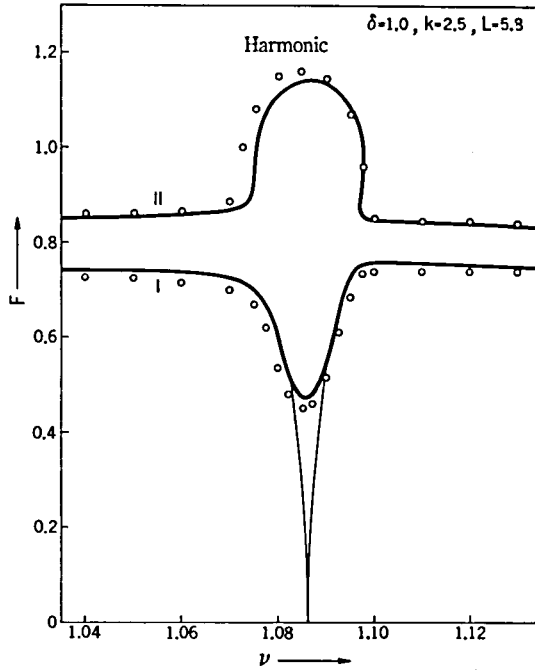


図 5.31 3 周波概周期振動の安定限界。
 曲線 I : I 型の安定限界。
 曲線 II : II 型の存在限界 ≡ 基本調波振動の安定限界。

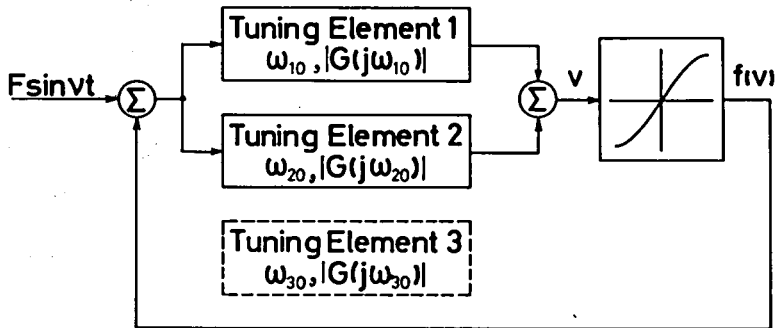


図 5.32 系 (5.1) と等価な多重ループ系

図 5.32 の系が、系 (5.1) における諸現象を説明するためのモデルになりうることは、以下の事実からも明らかである。まず、現象面から見ても、この多自由度モデルは妥当である。なぜなら、本章で得られた振動現象の諸性質は、実際に、2 自由度自励振動系における強制振動の諸性質⁽²⁷⁾に強く類似しているからである。さらに、4.7 節で触れたように、数学的な面か

ら見ても図 5.32 のモデルは妥当性をもつ。すなわち、4 章で示したように、系 (4.1) の平均化方程式として、一般に、非線形常微分方程式の連立系が得られるからである。続く第 6 章で、系 (5.1) を平均法によって解析するので、系 (5.1) と図 5.32 に示す系との間の類似性は、次章において、一層明白になるものと思われる。

5.9 結 言

本 5 章では、2 個の発振モードが存在する場合を対象にして、むだ時間を含む強制振動系 (5.1) における振動現象を系統的に解析した。振動の定常応答は調波解析法によって求め、その安定性は変分系の安定問題として考察した。解析結果の妥当性は波形解析機能をもつハイブリッド・シミュレータにより確認した。

本章の結果は次のように要約される。

(1) 発振のモード数が 2 の系には、表 5.2 に示す 7 種類の強制振動が生じる。本章ではこれらのうち、基本調波振動、1/3 次分数調波振動、3 次高調波振動、2 周波概周期振動、3 周波概周期振動の 5 種類の振動について解析した。

(2) 周期振動に対する変分系はむだ時間を含む線形周期系となるので、その安定問題の検討には第 3 章の成果を応用した。また概周期振動に対する変分系は線形概周期系となるが、各時変係数の周波数の共振・非共振の関係を適切に考慮すれば、その安定問題の検討も周期振動の場合とほぼ同様に行いうることを示した。

(3) 基本調波振動の定常応答とその安定性を検討した。そして変分系の共振状態には 3 種類のものがあることを指摘するとともに、基本調波の定常状態の不安定化の機構もそれに応じて 3 種類のものがあることを飽和要素の増分記述関数を用いて説明した。

(4) 1/3 次分数調波振動と 3 次高調波振動の基本的な性質は、強制項をもつ van der Pol 方程式で記述される系におけるそれらの性質⁽¹³⁾と同じであることを説明した。

(5) 2 周波概周期振動の定常応答とその安定性を検討した。そして定常状態が不安定となるのに 3 種類の機構があることを指摘し、それぞれの安定限界を求めた。

(6) 3 周波概周期振動の定常応答とその安定性を検討した。そして、この振動の波形が位相変調波形になる場合があることを示すとともに、その理由は飽和要素の 3 信号効果に基くことを説明した。

(7) 以上の検討を総合することにより、むだ時間を含む非線形系 (5.1) の振動系としての性質は (むだ時間を含まない) 多自由度非線形系のそれと類似であることを明らかにした。

第6章 平均法による強制振動の解析^[5, 6]

6.1 緒 言

本6章では、第4章と同じく平均法を用いて、次式(≡(5.1)式)，

$$\ddot{v}(t) + 2\delta \dot{v}(t) + v(t) + k[1 - v^2(t-L)] \dot{v}(t-L) = \nu k F \cos \nu t, \quad (6.1)$$

で表わされる系における強制振動を解析する。解析に当って、5章(5.2.1節)と同じ仮定を設ける。すなわち、

仮定(1) 自励系($F=0$)は、2個の発振モード(周波数 ω_{10} と ω_{20} ，振幅 r_{10} と r_{20})を有す、

仮定(2) 上の2個の発振モードの間に、いわゆる内部共振の関係はない、

仮定(3) 発振条件を満たさない、モード3，モード4，……の影響は無視できる。

5章では、系(6.1)の定常応答を調波解析法によって求め、その安定性は、線形時変系の安定問題として考察した。これに対し本章では、系(6.1)を平均法によって解析するが、当然ながら、両方法による解析結果は一致する。

本章末尾(6.4節)では、系(6.1)の解析に、常微分方程式系に対する平均法を形式的に適用しても、妥当な結果は得られないことを、数値例によって明らかにする。

6.2 平均化方程式の誘導

ν が ω_{10} か ω_{20} の近傍にある場合(共振の場合)と、そうでない場合(非共振の場合)とでは、平均化方程式の誘導法が若干異なる。前者では、いわゆる基本調波同期化現象を考慮せねばならないからである。

6.2.1 ν が ω_{10} の近傍にある場合

本6.2.1節では、 F も小パラメータであると仮定する。また以下では、 $|\nu - \omega_{10}| \leq O(\epsilon_{10})^\dagger$ と仮定するが、 $|\nu - \omega_{20}| \leq O(\epsilon_{20})$ の場合も同様に議論できる。

さて、無振動系の選定に関して、4.4.3節で述べた事柄を思い出そう。同節では、複数の発振モードが存在する場合について、第1近似に関する限り、各モード毎に独立に無振動系を選ぶことを述べた。故に、第1モードの無振動系は $\pm j\nu$ なる特性根をもつように選ぶのが適当である(図6.1)。また、第2モードの無振動系は $\pm j\omega_{20}$ なる特性根をもつように選ぶの

[†] ϵ_{10} と ϵ_{20} は(4.32)式で定義される小パラメータである。

が適当である。従って、第1モードの無摂動系は、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}(t) + 2\delta \dot{v}(t) + v(t) + \mu_1 \nu k v(t-L) \\ + k(1-\varepsilon_1) \dot{v}(t-L) = 0, \\ \text{ここに, } \varepsilon_1 = 1 + A(\nu), \mu_1 = B(\nu), \\ \dots\dots (6.2)^\dagger \end{aligned} \right\}$$

と仮定し、第2モードの無摂動系は、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}(t) + 2\delta \dot{v}(t) + v(t) + k(1-\varepsilon_2) \\ \times \dot{v}(t-L) = 0, \\ \text{ここに, } \varepsilon_2 = 1 + A(\omega_{20}) = \varepsilon_{20}, \end{aligned} \right\} (6.3)$$

と仮定する。(6.2)式中のパラメータ ε_1 と μ_1 は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1 + A(\omega_{10}) + A'(\omega_{10})(\nu - \omega_{10}) + o(|\nu - \omega_{10}|) \\ &= \varepsilon_{10} + A'(\omega_{10})(\nu - \omega_{10}) + o(|\nu - \omega_{10}|), \\ \mu_1 &= B'(\omega_{10})(\nu - \omega_{10}) + o(|\nu - \omega_{10}|), \end{aligned} \right\} (6.4)$$

によって、小パラメータであることに注意しよう。(6.4)式第2式から判るように、 μ_1 は離調度に対応するパラメータである。

無摂動系(6.2)式と(6.3)式から出発し、4.4節と同様な過程を経ることによって、平均化方程式、

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ r_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_1 & A'_1 \\ -A'_1 & B'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 r_1 - \frac{1}{4} r_1 (r_1^2 + 2r_2^2) + F \sin \theta_1 \\ \mu_1 r_1 + F \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{r}_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_2 & A'_2 \\ -A'_2 & B'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon_2 r_2 - \frac{1}{4} r_2 (2r_1^2 + r_2^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \text{ここに, } A'_1 &= A'(\nu), B'_1 = B'(\nu), A'_2 = A'(\omega_{20}), B'_2 = B'(\omega_{20}) \end{aligned} \right\} (6.5)$$

を得る。ただし、上式第1式が第1モードに、第2式が第2モードに、それぞれ対応する。

(6.5)式第1式において、

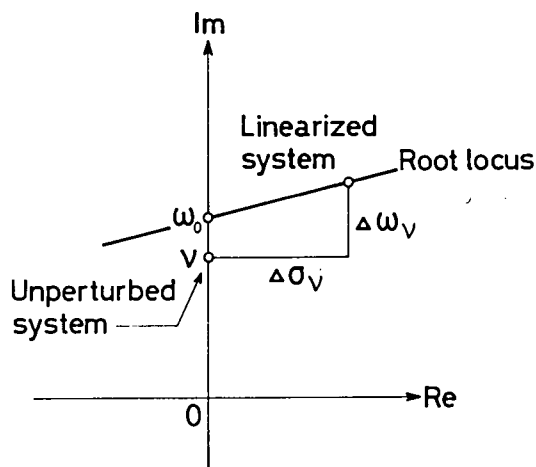


図 6.1 線形化系の特性根と無摂動系の特性根

†系(6.2)の特性方程式は、 $1/G(s) + \mu_1 \nu / s + 1 - \varepsilon_1 = 0$ 。 $s = j\nu$ を代入すれば、 $A(\nu) + jB(\nu) - j\mu_1 + 1 - \varepsilon_1 = 0$ 。

$$-\begin{pmatrix} B'_1 & A'_1 \\ -A'_1 & B'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta\sigma_\nu \\ \Delta\omega_\nu \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

と表わすとき、 $\Delta\sigma_\nu$ と $\Delta\omega_\nu$ は、図 6.1 に示すように、線形化系 (4.8) の $j\omega_{10}$ 近傍の特性根と、無摂動系 (6.2) の特性根 $j\nu$ の両者の差に対応することに注意しよう。

6.2.2 ν が ω_{i0} の近傍にない場合

$c \cos(\nu t + \varphi_\nu)$ を、系 (6.1) の線形化系、

$$\ddot{v}(t) + 2\delta \dot{v}(t) + v(t) + k\dot{v}(t-L) = \nu k F \cos \nu t, \quad (6.7)$$

の解とする。このとき、 c の値は、

$$c = F / [(1 + A(\nu))^2 + B^2(\nu)]^{1/2}, \quad (6.8)$$

で与えられる。いま、系 (6.1) に、変数変換 $v(t) = w(t) + c \cos(\nu t + \varphi_\nu)$ を施し、適当に時間軸をずらせた後、変数名を $w(t)$ から再び $v(t)$ に戻せば、

$$\begin{aligned} & \ddot{v}(t) + 2\delta \dot{v}(t) + v(t) + k\dot{v}(t-L) \\ & - k[v(t-L) + c \cos \nu t]^2 [\dot{v}(t-L) - \nu c \sin \nu t] = 0, \end{aligned} \quad (6.9)$$

を得る。非共振の場合の平均化方程式の誘導は、(6.9) 式を出発点とする。

モード 1 に対する無摂動系は $\pm j\omega_1$ なる特性根をもつように、また、モード 2 に対する無摂動系は $\pm j\omega_2$ なる特性根をもつように選ぶ。すなわち、モード i ; $i = 1, 2$ に対する無摂動系は、

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{v}(t) + 2\delta \dot{v}(t) + v(t) + \mu_i \omega_i k v(t-L) + k(1 - \epsilon_i) \dot{v}(t-L) = 0, \\ & \text{ここに、} \epsilon_i = 1 + A(\omega_i) = 1 + A_i, \quad \mu_i = B(\omega_i) = B_i; i = 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

と選ぶ。系 (6.10) と系 (6.9) の差、

$$\begin{aligned} & f_i = \mu_i \omega_i k v(t-L) - \epsilon_i k \dot{v}(t-L) \\ & + k[v(t-L) + c \cos \nu t]^2 [\dot{v}(t-L) - \nu c \sin \nu t]; i = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.11)$$

が、これに対する摂動項である。

系 (6.10) と系 (6.11) について、4.4 節と同様な手順を繰り返せば、次の自律系が得られる。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ r_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} &= -\frac{2}{k\omega_1} \begin{pmatrix} B'_1 & A'_1 \\ -A'_1 & B'_1 \end{pmatrix}^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \begin{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \theta_1 - \omega_1 L) \\ \cos(\omega_1 t + \theta_1 - \omega_1 L) \end{pmatrix} f_1(t, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) dt, \\ \begin{pmatrix} \dot{r}_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= -\frac{2}{k\omega_2} \begin{pmatrix} B'_2 & A'_2 \\ -A'_2 & B'_2 \end{pmatrix}^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \theta_2 - \omega_2 L) \\ \cos(\omega_2 t + \theta_2 - \omega_2 L) \end{pmatrix} f_2(t, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) dt \\ & \dots\dots (6.12) \end{aligned} \right\}.$$

ここに、 f_1 と f_2 は次の周波数成分を含む。

$$\left. \begin{aligned} &\omega_1, \omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2 \pm \omega_1, \\ &2\omega_1 \pm \nu, 2\omega_2 \pm \nu, \omega_1 \pm \omega_2 \pm \nu, \omega_1 \pm 2\nu, \omega_2 \pm 2\nu, \nu, 3\nu \end{aligned} \right\}. \quad (6.13)$$

さて、 ω_1, ω_2 と ν の間に特別な関係があれば、(6.13)に含まれる周波数のうちで、 ω_1 と ω_2 以外にも、 ω_1 あるいは ω_2 に等しいものがありうる。これらの関係を、表 6.1 の 3 項以下にまとめる。ただし、同表 1 項と 2 項は、6.2.1 節で考察した共振の場合である。

表 6.1 ω_1, ω_2 と ν の間の相互関係 ($\omega_1 < \omega_2$)

項	ω_1, ω_2 と ν の関係	ω_1 に等しい周波数	ω_2 に等しい周波数	備 考
1	$\omega_1 = \nu$	ν	—————	$\nu \doteq \omega_{10}$
2	$\omega_2 = \nu$	—————	ν	$\nu \doteq \omega_{20}$
3	$\omega_1 = \nu/3$	$\nu - 2\omega_1$	—————	$\nu \doteq 3\omega_{10}$
4	$\omega_2 = \nu/3$	—————	$\nu - 2\omega_2$	$\nu \doteq 3\omega_{20}$
5	$\omega_1 = 3\nu$	3ν	—————	$\nu \doteq \omega_{10}/3$
6	$\omega_2 = 3\nu$	—————	3ν	$\nu \doteq \omega_{20}/3$
7	$\omega_1 + \omega_2 = 2\nu$	$2\nu - \omega_2$	$2\nu - \omega_1$	$\nu \doteq (\omega_{10} + \omega_{20})/2$
8	$\omega_2 - \omega_1 = 2\nu$	$\omega_2 - 2\nu$	$\omega_1 + 2\nu$	$\nu \doteq (\omega_{20} - \omega_{10})/2$
9	$2\omega_2 - \omega_1 = \nu$	$2\omega_2 - \nu$	$\nu + \omega_1 - \omega_2$	$\nu \doteq 2\omega_{20} - \omega_{10}$
10	$\omega_1 + 2\omega_2 = \nu$	$\nu - 2\omega_2$	$\nu - \omega_1 - \omega_2$	$\nu \doteq \omega_{10} + 2\omega_{20}$
11	$2\omega_1 + \omega_2 = \nu$	$\nu - \omega_1 - \omega_2$	$\nu - 2\omega_1$	$\nu \doteq 2\omega_{10} + \omega_{20}$
12	$\pm(2\omega_1 - \omega_2) = \nu$	$\pm\nu - \omega_1 + \omega_2$	$\mp\nu + 2\omega_1$	$\nu \doteq 2\omega_{10} - \omega_{20} $
13	特別な関係なし	—————	—————	—————

表 6.1 に示される 13 通りの場合から、以下では、1 項、3 項、5 項、7 項、9 項および 13 項を、代表として取り上げ、解析する。他の場合も、解析の過程は、上記の何れかとほぼ同様である。

(6.12) 式右辺の積分を行うことにより、各場合に対する平均化方程式が得られる。結果は次のとおりである。ただし、1 項： $\omega_1 = \nu$ のときの平均化方程式は、(6.5) 式で与えられる。

3 項： $\omega_1 = \nu/3$ の場合、

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ r_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_1 & A'_1 \\ -A'_1 & B'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_1 r_1 - \frac{1}{4} r_1 (2c^2 + r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1}{4} c r_1^2 \cos 3\theta_1 \\ \mu_1 r_1 + \frac{1}{4} c r_1^2 \sin 3\theta_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{r}_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_2 & A'_2 \\ -A'_2 & B'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_2 r_2 - \frac{1}{4} r_2 (2c^2 + 2r_1^2 + r_2^2) \\ \mu_2 r_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (6.14)$$

5項： $\omega_1 = 3\nu$ の場合，

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ r_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_1 & A'_1 \\ -A'_1 & B'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_1 r_1 - \frac{1}{4} r_1 (2c^2 + r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1}{12} c^3 \cos \theta_1 \\ \mu_1 r_1 + \frac{1}{12} c^3 \sin \theta_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{r}_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_2 & A'_2 \\ -A'_2 & B'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_2 r_2 - \frac{1}{4} r_2 (2c^2 + 2r_1^2 + r_2^2) \\ \mu_2 r_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (6.15)$$

7項： $\omega_1 + \omega_2 = 2\nu$ の場合，

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ r_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_1 & A'_1 \\ -A'_1 & B'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_1 r_1 - \frac{1}{4} r_1 (2c^2 + r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1}{4} c^2 r_2 \cos \varphi \\ \mu_1 r_1 + \frac{1}{4} c^2 r_2 \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{r}_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_2 & A'_2 \\ -A'_2 & B'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_2 r_2 - \frac{1}{4} r_2 (2c^2 + 2r_1^2 + r_2^2) - \frac{1}{4} c^2 r_1 \cos \varphi \\ \mu_2 r_2 + \frac{1}{4} c^2 r_1 \sin \varphi \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\}. \quad (6.16)$$

ここに， $\varphi = \theta_1 + \theta_2$

9項： $2\omega_2 - \omega_1 = \nu$ の場合，

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ r_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_1 & A'_1 \\ -A'_1 & B'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_1 r_1 - \frac{1}{4} r_1 (2c^2 + r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1}{4} c r_2^2 \cos \varphi \\ \mu_1 r_1 + \frac{1}{4} c r_2^2 \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{r}_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_2 & A'_2 \\ -A'_2 & B'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_2 r_2 - \frac{1}{4} r_2 (2c^2 + 2r_1^2 + r_2^2) - \frac{1}{2} c r_1 r_2 \cos \varphi \\ \mu_2 r_2 - \frac{1}{2} c r_1 r_2 \sin \varphi \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\}. \quad (6.17)$$

ここに， $\varphi = \theta_1 - 2\theta_2$

13項： ω_1, ω_2 と ν の間に特別な関係がない場合，

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ r_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_1 & A'_1 \\ -A'_1 & B'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_1 r_1 - \frac{1}{4} r_1 (2c^2 + r_1^2 + 2r_2^2) \\ \mu_1 r_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{r}_2 \\ r_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_2 & A'_2 \\ -A'_2 & B'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_2 r_2 - \frac{1}{4} r_2 (2c^2 + 2r_1^2 + r_2^2) \\ \mu_2 r_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (6.18)$$

6.3 定常応答とその安定性

6.2 節で導いた平均化方程式は常微分方程式であるから，定常応答とその安定性の検討は，常微分方程式系における通常の議論と同様である。すなわち， $\dot{r}_i = \dot{\theta}_i = 0$ ； $i = 1, 2$ から，定常応答が求まる[†]。また，変分方程式は，定係数線形常微分方程式となるから，定常応答の安定

[†]定数解ばかりでなく，周期解が存在することもある。しかし，本論文では，周期解に関する考察は省略する。

条件は、Routh-Hurwitz判定法に基いて、与えることができる。

以下に、前節で示した6通りの場合について、定常応答とその安定性を検討するが、結果は第5章におけるものと一致するので、5章に既出の式等は再記せず、式番を引用するに留める。

6.3.1 $\omega_1 = \nu$ の場合

この場合の変分方程式の特性方程式は、

$$\det \begin{bmatrix} B'_1 s + A_1 + D_1 & A'_1 s - B_1 & -r_1 r_2 & 0 \\ -A'_1 s + B_1 & B'_1 s + A_1 + D_2 & 0 & 0 \\ -r_1 r_2 & 0 & B'_2 s + A_2 + D_3 & A'_2 s \\ 0 & 0 & -A'_2 s + B_2 & B'_2 s \end{bmatrix} = 0,$$

ここに、 $D_1 = 1 - \frac{3}{4} r_1^2 - \frac{1}{2} r_2^2$, $D_2 = 1 - \frac{1}{4} r_1^2 - \frac{1}{2} r_2^2$, $D_3 = 1 - \frac{1}{2} r_1^2 - \frac{3}{4} r_2^2$,

..... (6.19)

で与えられる。ただし、 s は特性根、 r_1 と r_2 は定常値を表わし、 ϵ_i と μ_i ; $i = 1, 2$ は、それぞれ $1 + A_i$ と B_i に戻した。上式は、(5.60)式と本質的に一致する。定常状態は、次の2種類がある。

1° $r_1 \neq 0$, $r_2 = 0$ 基本調波振動,

定常応答 (5.5)式, 安定条件 (5.16)式。

2° $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, $\omega_2 = \omega_{20}$ 2周波概周期振動,

定常応答 (5.47)式, 安定条件 (5.62)式。

6.3.2 $\omega_1 = \nu/3$ の場合

この場合の変分方程式の特性方程式は、

$$\det \begin{bmatrix} B'_1 s + A_1 + D_1 & A'_1 s + \frac{3}{4} c r_1 \sin 3\theta_1 & -r_1 r_2 & 0 \\ -A'_1 s + B_1 + \frac{1}{2} c r_1 \sin 3\theta_1 & B'_1 s + \frac{3}{4} c r_1 \cos 3\theta_1 & 0 & 0 \\ -r_1 r_2 & 0 & B'_2 s + A_2 + D_2 & A'_2 s \\ 0 & 0 & -A'_2 s + B_2 & B'_2 s \end{bmatrix} = 0,$$

ここに、 $D_1 = 1 - \frac{1}{2} c^2 - \frac{3}{4} r_1^2 - \frac{1}{2} r_2^2 - \frac{1}{2} c r_1 \cos 3\theta_1$, $D_2 = 1 - \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{2} r_1^2 - \frac{3}{4} r_2^2$,

..... (6.20)

で与えられる。定常状態は次の4種類である。

1° $r_1 = r_2 = 0$ 基本調波振動,

定常応答 …… (6.8) 式, 安定条件 …… (5.12) 式。

2° $r_1 \neq 0, r_2 = 0$ …… 1/3 次分数調波振動,

定常応答 …… (5.35) 式, 安定条件 …… (5.38) 式。

3° $r_1 = 0, r_2 \neq 0, \omega_2 = \omega_{20}$ …… 2 周波概周期振動,

定常応答 …… (5.47) 式, 安定条件 …… (5.53) 式。

4° $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, \omega_2 = \omega_{20}$

この定常状態は, 第 5 章で未検討である[†]。定常応答は,

$$\left. \begin{aligned} [A_1 + 1 - \frac{1}{4}(2c^2 + r_1^2 + 2r_2^2)]^2 + B_1^2 &= (\frac{1}{4}cr_1)^2, \\ r_{20}^2 - 2c^2 - 2r_1^2 - r_2^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

によって与えられる。しかし, (6.20) 式を $s(s^3 + Ps^2 + Qs + R) = 0$ と展開するとき, $R > 0$ から $Q < 0$ が導かれるので, この定常状態は常に不安定である。

6.3.3 $\omega_1 = 3\nu$ の場合

変分方程式の特性方程式は,

$$\det \begin{bmatrix} B_1's + A_1 + D_1 & A_1's + \frac{1}{12}\frac{c^3}{r_1}\cos\theta_1 & -r_1r_2 & 0 \\ -A_1's + B_1 & B_1's + \frac{1}{12}\frac{c^3}{r_1}\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ -r_1r_2 & 0 & B_2's + A_2 + D_2 & A_2's \\ 0 & 0 & -A_2's + B_2 & B_2's \end{bmatrix} = 0, \quad \left. \begin{aligned} \text{ここに, } D_1 &= 1 - \frac{1}{2}c^2 - \frac{3}{4}r_1^2 - \frac{1}{2}r_2^2, \quad D_2 = 1 - \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}r_1^2 - \frac{3}{4}r_2^2, \\ &\dots\dots (6.22) \end{aligned} \right\}$$

で与えられる。定常状態は次の 2 種類である。

1° $r_1 \neq 0, r_2 = 0$ …… 3 次高調波振動,

定常応答 …… (5.41) 式, 安定条件 …… (5.43) 式。

2° $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, \omega_2 = \omega_{20}$ …… 表 5.2 第 5 項に示す概周期振動。

この定常状態は, 第 5 章で未検討である。定常応答は,

$$\left. \begin{aligned} [\{A_1 + 1 - \frac{1}{4}(2c^2 + r_1^2 + 2r_2^2)\}^2 + B_1^2]r_1^2 &= (\frac{1}{12}c^3)^2, \\ r_{20}^2 - 2c^2 - 2r_1^2 - r_2^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

[†]常に不安定なので, この定常状態は表 5.2 から除外した。

で与えられる。また安定条件は、(6.22)式を、 $s(s^3 + Ps^2 + Qs + R) = 0$ と展開するとき、

$$P > 0, \quad R > 0, \quad PQ - R > 0, \quad (6.24)$$

で与えられる。図5.14における細線は、 $\nu = \omega_{10}/3$ ($\omega_1 = \omega_{10}$)における振幅特性を、(6.23)式から求めた結果である。

6.3.4 $\omega_1 + \omega_2 = 2\nu$ の場合

変分方程式の特性方程式は、

$$\det \begin{bmatrix} B'_1 s + A_1 + D_1 & A'_1 s + \frac{1}{4} \frac{r_2}{r_1} c^2 \sin \varphi & -r_1 r_2 - \frac{1}{4} c^2 \cos \varphi & \frac{1}{4} c^2 \sin \varphi \\ -A'_1 s + B_1 & B' s + \frac{1}{4} \frac{r_2}{r_1} c^2 \cos \varphi & \frac{1}{4} c^2 \sin \varphi & \frac{1}{4} c^2 \cos \varphi \\ -r_1 r_2 - \frac{1}{4} c^2 \cos \varphi & \frac{1}{4} c^2 \sin \varphi & B'_2 s + A_2 + D_2 & A'_2 s + \frac{1}{4} \frac{r_1}{r_2} c^2 \sin \varphi \\ \frac{1}{4} c^2 \sin \varphi & \frac{1}{4} c^2 \cos \varphi & -A'_2 s + B_2 & B'_2 s + \frac{1}{4} \frac{r_1}{r_2} c^2 \cos \varphi \end{bmatrix} = 0, \quad (6.25)$$

ここに、 $D_1 = 1 - \frac{1}{2} c^2 - \frac{3}{4} r_1^2 - \frac{1}{2} r_2^2$, $D_2 = 1 - \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{2} r_1^2 - \frac{3}{4} r_2^2$,

で与えられる。上式は、(5.71)式と本質的に同じである。定常状態は、次の2種類である。

1° $r_1 = r_2 = 0$ …… 基本調波振動。

定常応答は(6.8)式で与えられる。しかしながら、 ω_1 , ω_2 , r_2/r_1 , r_1/r_2 および φ などの値が不定なので、(6.25)式から、この定常応答の安定性を知ることはできない。この場合は、平均化方程式(6.16)式に立ち戻り、 r_1 と r_2 を微小量と見做して(ξ_1 と ξ_2 で表わす)、これらの高次項を除いた系、

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \xi_1 \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_1 & A'_1 \\ -A'_1 & B'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\epsilon_1 - \frac{1}{2} c^2) \xi_1 - \frac{1}{4} c^2 \xi_2 \cos \varphi \\ \mu_1 \xi_1 + \frac{1}{4} c^2 \xi_2 \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{\xi}_2 \\ \xi_2 \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_2 & A'_2 \\ -A'_2 & B'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\epsilon_2 - \frac{1}{2} c^2) \xi_2 - \frac{1}{4} c^2 \xi_1 \cos \varphi \\ \mu_2 \xi_2 + \frac{1}{4} c^2 \xi_1 \sin \varphi \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

ここに、 $\varphi = \theta_1 + \theta_2$,

について、 ξ_1 と ξ_2 が、時間的に増大するか否かによって判定すればよい。ただし、 ω_1 と ω_2 の値が不明のため、 A'_i , B'_i , ϵ_i と μ_i ; $i = 1, 2$ などの値は不明であるが、暫くは形式的に議論を続ける。さて、(6.26)式は見掛け上、非線形系であるけれども、変数変換 $a_i = \xi_i \cos \theta_i$, $b_i = \xi_i \sin \theta_i$; $i = 1, 2$ によって、線形系に直せる。結果は、

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{b}_1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_1 & A'_1 \\ -A'_1 & B'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\epsilon_1 - \frac{1}{2}c^2)a_1 - \mu_1 b_1 - \frac{1}{4}c^2 a_2 \\ \mu_1 a_1 + (\epsilon_1 - \frac{1}{2}c^2)b_1 + \frac{1}{4}c^2 b_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \dot{a}_2 \\ \dot{b}_2 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B'_2 & A'_2 \\ -A'_2 & B'_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\epsilon_2 - \frac{1}{2}c^2)a_2 - \mu_2 b_2 - \frac{1}{4}c^2 a_1 \\ \mu_2 a_2 + (\epsilon_2 - \frac{1}{2}c^2)b_2 + \frac{1}{4}c^2 b_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

である。 ϵ_i と μ_i ; $i=1, 2$ をそれぞれ, $1+A_i$ と B_i に戻すとともに, $1-(1/2)c^2$ と $(1/4)c^2$ を, それぞれ p と q で表わせば, 系 (6.27) の特性方程式は,

$$\left. \begin{aligned} X^2(s) + Y^2(s) &= 0, \quad \text{ここに,} \\ X(s) &= (A'_1 A'_2 + B'_1 B'_2) s^2 + [(p+A_1)B'_2 + (p+A_2)B'_1 - A'_1 B_2 - A'_2 B_1] s \\ &\quad + (p+A_1)(p+A_2) + B_1 B_2 - q^2, \\ Y(s) &= (A'_1 B'_2 - A'_2 B'_1) s^2 - [(p+A_1)A'_2 - (p+A_2)A'_1 + B_1 B'_2 - B'_1 B_2] s \\ &\quad + (p+A_1)B_2 - (p+A_2)B_1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

で与えられる。

さて, 系 (6.27) は, 系 (6.9) において, v を微小量と見做して (ξ で表わす), その高次項を取り除いた系 (基本調波振動の変分方程式),

$$\ddot{\xi}(t) + 2\delta\dot{\xi}(t) + \xi(t) + k \frac{d}{dt} [(p+2q \cos 2\nu t) \xi(t-L)] = 0, \quad (6.29)$$

の平均化方程式に他ならない。従って, (5.20) 式を参照すれば判るように, 特性方程式 (6.28) 式が実根をもつように, ω_1 と ω_2 を決めるのが妥当である。このとき, 安定限界は (5.21) 式で与えられる。

2° $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$ …… 3 周波概周期振動,

定常応答 …… (5.65) 式, 安定条件 …… (5.73) 式。

6.3.5 $2\omega_2 - \omega_1 = \nu$ の場合

変分方程式の特性方程式は,

$$\det \begin{bmatrix} B'_1 s + A_1 + D_1 & A'_1 s + \frac{1}{4} \frac{cr_2^2}{r_1} \sin \varphi & -r_1 r_2 - \frac{1}{2} cr_2 \cos \varphi & -\frac{1}{2} cr_2 \sin \varphi \\ -A'_1 s + B_1 & B'_1 s + \frac{1}{4} \frac{cr_2^2}{r_1} \cos \varphi & \frac{1}{2} cr_2 \sin \varphi & -\frac{1}{2} cr_2 \cos \varphi \\ -r_1 r_2 - \frac{1}{2} cr_2 \cos \varphi & \frac{1}{2} cr_2 \sin \varphi & B'_2 s + A_2 + D_2 & A'_2 s - cr_1 \sin \varphi \\ -\frac{1}{2} cr_2 \sin \varphi & -\frac{1}{2} cr_2 \cos \varphi & -A'_2 s + B_2 - \frac{1}{2} cr_1 \sin \varphi & B'_2 s + cr_1 \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$= 0, \text{ここに, } D_1 = 1 - \frac{1}{2}c^2 - \frac{3}{4}r_1^2 - \frac{1}{2}r_2^2,$$

$$D_2 = 1 - \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}r_1^2 - \frac{3}{4}r_2^2 - \frac{1}{2}cr_1 \cos \varphi,$$

..... (6.30)

で与えられる。3種類の定常状態がある。

1° $r_1 = r_2 = 0$ 基本調波振動,

定常応答 (6.8)式, 安定条件 (5.12)式。

2° $r_1 \neq 0, r_2 = 0, \omega_1 = \omega_{10}$ 2周波概周期振動。

定常応答は(5.47)式で与えられる。しかし, φ が不定のため, (6.30)式から, 安定性を知ることとはできない。この場合は, 平均化方程式(6.17)式に立ち戻って, 6.3.4節1°と同様な手順によって, 検討を進めねばならない。結果としての安定条件は, (5.56)式に一致する。

3° $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$ 3周波概周期振動。

この定常状態は, 第5章で未検討である。定常応答は,

$$(1+A_1)r_1 - \frac{1}{4}r_1(2c^2 + r_1^2 + 2r_2^2) - \frac{1}{4}cr_2^2 \cos \varphi = 0,$$

$$B_1r_1 + \frac{1}{4}cr_2^2 \sin \varphi = 0,$$

$$(1+A_2) - \frac{1}{4}(2c^2 + 2r_1^2 + r_2^2) - \frac{1}{2}cr_1 \cos \varphi = 0,$$

$$B_2 - \frac{1}{2}cr_1 \sin \varphi = 0,$$

$$\text{ここに, } 2\omega_2 - \omega_1 = \nu,$$

(6.31)

から求まる。安定条件は, (6.30)式を $s(s^3 + Ps^2 + Qs + R) = 0$ と展開するとき, $P > 0$, $R > 0$ と $PQ - R > 0$ で与えられる。

6.3.6 ω_1, ω_2 と ν の間に特別な関係がない場合

変分方程式の特性方程式は,

$$\det \begin{bmatrix} B'_1s + A_1 + D_1 & A'_1s & 0 & 0 \\ -A'_1s + B_1 & B'_1s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B'_2s + A_2 + D_2 & A'_2s \\ 0 & 0 & -A'_2s + B_2 & B'_2s \end{bmatrix} = 0, \quad (6.32)$$

$$\text{ここに, } D_1 = 1 - \frac{1}{2}c^2 - \frac{3}{4}r_1^2 - \frac{1}{2}r_2^2, \quad D_2 = 1 - \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}r_1^2 - \frac{3}{4}r_2^2,$$

で与えられる。定常状態は次の4種類である。

1° $r_1 = r_2 = 0$ …… 基本調波振動,

定常応答 …… (6.8) 式, 安定条件 …… (5.12) 式。

2° $r_1 \neq 0, r_2 = 0, \omega_1 = \omega_{10}$ …… 2 周波概周期振動,

定常応答 …… (5.47) 式, 安定条件 …… (5.53) 式。

3° $r_1 = 0, r_2 \neq 0, \omega_2 = \omega_{20}$ …… 2 周波概周期振動,

定常応答 …… (5.47) 式, 安定条件 …… (5.53) 式。

4° $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0, \omega_1 = \omega_{10}, \omega_2 = \omega_{20}$ 。

この定常状態は, 第 5 章で未検討である[†]。定常応答は,

$$r_1^2 = \frac{1}{3}(2r_{20}^2 - r_{10}^2 - 2c^2), \quad r_2^2 = \frac{1}{3}(2r_{10}^2 - r_{20}^2 - 2c^2), \quad (6.33)$$

与えられるが, この定常状態は常に不安定である。

6.4 考 察

4.6 節において, むだ時間を含む非線形系の解析に, 常微分方程式系に対する平均法を形式的に適用しても, 正しい平均化方程式が得られないことを説明した。本 6.4 節では, 実際上記方法を系 (6.1) の解析に適用し, 数値例によって, 上記方法からは妥当な結果が得られないことを明らかにする。

さて, 本 6.4 節では, 系 (6.1) に関して,

1° 自励系 ($F = 0$) は, 1 モードの自励振動 (周波数 ω_0 , 振幅 r_0) を有す,

2° ν は ω_0 の近傍にある,

と仮定する。この場合に, 常微分方程式系に対する平均法を形式的に適用すると, 以下のようになる。

系 (6.1) を,

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= r(t) \cos(\nu t + \theta(t)) = r \cos \phi, \\ \dot{v}(t) &= -\nu r(t) \sin(\nu t + \theta(t)) = -\nu r \sin \phi \\ \text{ここに, } \dot{r} \cos \phi - r \dot{\theta} \sin \phi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

によって, 極座標系に変換する。変換後の方程式は,

$$\dot{r} = -\frac{k}{2} \left[\frac{4\delta}{k} r \sin^2 \phi - \frac{2(1-\nu^2)}{k\nu} r \cos \phi \sin \phi \right]$$

[†]常に不安定であるから, この定常状態は表 5.2 から除外した。

$$\begin{aligned}
& + 2r_L(1 - r_L^2 \cos^2 \phi_L) \sin \phi \sin \phi_L + 2F \cos \nu t \sin \phi], \\
r\dot{\theta} = & -\frac{k}{2} \left[\frac{4\delta}{k} r \cos \phi \sin \phi - \frac{2(1 - \nu^2)}{k\nu} r \cos^2 \phi \right. \\
& \left. + 2r_L(1 - r_L^2 \cos^2 \phi_L) \cos \phi \sin \phi_L + 2F \cos \nu t \cos \phi], \right. \\
& \left. \text{ここに, } r_L = r(t-L), \theta_L = \theta(t-L) \text{ および } \phi_L = \nu(t-L) + \theta_L \right] \quad (6.35)
\end{aligned}$$

で与えられる。(6.35)式右辺を平均することにより, 平均化方程式(差分微分方程式),

$$\begin{aligned}
\dot{r} = & -\frac{k}{2} \left[\frac{2\delta}{k} r + r_L \left(1 - \frac{1}{4} r_L^2 \right) \cos(\theta - \theta_L + \nu L) + F \sin \theta \right], \\
r\dot{\theta} = & -\frac{k}{2} \left[-\frac{1 - \nu^2}{k\nu} r - r_L \left(1 - \frac{1}{4} r_L^2 \right) \sin(\theta - \theta_L + \nu L) + F \cos \theta \right], \end{aligned} \quad (6.36)$$

を得る。もし, r と θ は緩変化の関数であるとの理由によって, $r_L = r$, $\theta_L = \theta$ と置くならば, 常微分方程式,

$$\begin{aligned}
\dot{r} = & -\frac{k}{2} \left[\frac{2\delta}{k} r + r \left(1 - \frac{1}{4} r^2 \right) \cos \nu L + F \sin \theta \right], \\
r\dot{\theta} = & -\frac{k}{2} \left[-\frac{1 - \nu^2}{k\nu} r - r \left(1 - \frac{1}{4} r^2 \right) \sin \nu L + F \cos \theta \right], \end{aligned} \quad (6.37)$$

が, 平均化方程式として得られる[†]。

(6.36)式と(6.37)式において, $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ (従って, $r_L = r$, $\theta_L = \theta$) と置いて得られる定常応答は互に一致する。すなわち, 定常応答は

$$[(A + 1 - r^2/4)^2 + B^2] r^2 = F^2, \quad \text{ここに, } A = A(\nu), \quad B = B(\nu), \quad (6.38)$$

によって決められる。

定常応答の安定判別は, 次のように行われる。すなわち, (6.36)式と(6.37)式に対する変分方程式の特性方程式は, それぞれ,

$$\begin{aligned}
& s^2 + [2\delta + k(1 - \frac{1}{2} r^2) \cos \nu L \cdot e^{-sL}] s \\
& + \frac{k^2}{4} [\{ A + (1 - \frac{3}{4} r^2) e^{-sL} \} \{ A + (1 - \frac{1}{4} r^2) e^{-sL} \} + B^2] = 0, \quad (6.39) \\
& s^2 + [2\delta + k(1 - \frac{1}{2} r^2) \cos \nu L] s + \frac{k^2}{4} [(A + 1 - \frac{3}{4} r^2) (A + 1 - \frac{1}{4} r^2) + B^2] = 0, \\
& \dots\dots (6.40)
\end{aligned}$$

で与えられる。ただし, s は特性根, r は定常値を表わす。(6.39)式は超越方程式なので, す

[†] 4.6節で述べたように, δ と k がともに微小量ならば, 系(6.37)が平均化方程式として有効である。

すべての特性根の実部が負であるための条件を、陽に求めることは難しい[†]。そこで、(6.39)式に関しては、数値的な手段で、安定限界などを求めることになる。(6.40)式に対しては、安定条件は、

$$\left. \begin{aligned} 2\delta + k\left(1 - \frac{1}{2}r^2\right)\cos\nu L &> 0, \\ (A+1 - \frac{3}{4}r^2)(A+1 - \frac{1}{4}r^2) + B^2 &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

と書ける。

一方、本論文の方法によれば、平均化方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B' & A' \\ -A' & B' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Ar + r\left(1 - \frac{1}{4}r^2\right) + F\sin\theta \\ Br + F\cos\theta \end{pmatrix} \\ \text{ここに、} A' &= A'(\nu), \quad B' = B'(\nu) \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

となる。定常応答は、やはり(6.38)式で与えられる。変分方程式の特性方程式は、

$$\begin{aligned} [(A')^2 + (B')^2]s^2 + 2[(A+1 - \frac{1}{2}r^2)B' - A'B]s + (A+1 - \frac{3}{4}r^2)(A+1 - \frac{1}{4}r^2) \\ + B^2 = 0, \end{aligned} \quad (6.43)$$

となる。 $o(|\nu - \omega_0|)$ を無視すれば、 $(A+1 - r^2/2)B' - A'B > 0$ は、 $r > r_0/\sqrt{2}$ と同値であるから、安定条件は、

$$r > \frac{1}{\sqrt{2}}r_0, \quad (A+1 - \frac{3}{4}r^2)(A+1 - \frac{1}{4}r^2) + B^2 > 0, \quad (6.44)$$

と書ける。

以上のように、定常応答に関しては、いずれの方法によっても(6.38)式が得られる。しかし、(6.39)式、(6.41)式あるいは(6.44)式から得られる安定限界は、互に異なることを数値例によって示そう。図6.2は、系のパラメータを $\delta = 1.0$, $k = -2.5$, $L = 1.0$ ($\omega_0 = 0.556$, $r_0 = 0.481$)と選んだときの、基本調波振動の応答曲線を描いたものである。図中の太線は、安定条件(6.44)式によって決められる安定限界を表わしており、シミュレーションの結果(○印)も、この安定限界が妥当であることを証明している。これに対し、1点鎖線と2点鎖線は、それぞれ(6.39)式と(6.41)式によって決められる安定限界である。図に見る如く、これら両者は正しい安定限界(太線)から、大きくずれている。ただし、安定限界の楕円状の曲線部

[†] (6.39)式左辺のような、準多項式(quasi-polynomial)の零点がすべて左半面に存在するための必要十分条件が、L. S. Pontryaginによって与えられている¹⁰⁾。しかし、定理の条件の成立の可否を調べることは、一般に難しい。

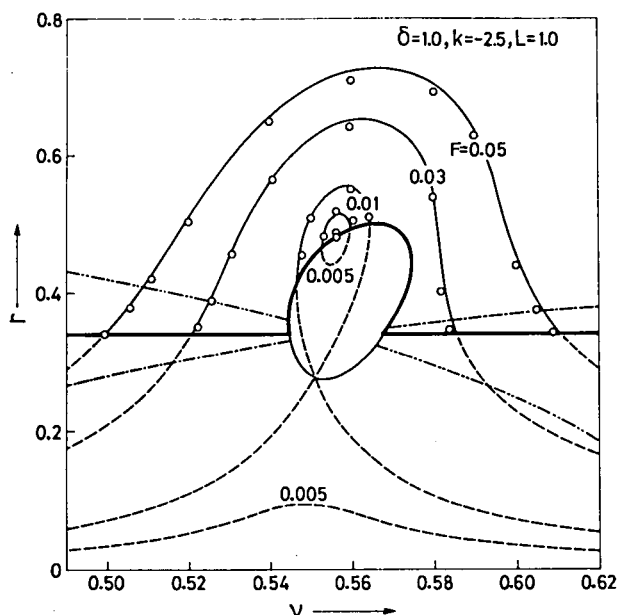


図 6.2 基本調波振動の応答曲線 ($\delta=1.0$, $k=-2.5$, $L=1.0$)。

細線と破線—応答曲線。

太線—正しい安定条件(6.44)式から定まる安定限界。

1点鎖線と2点鎖線—常微分方程式系に対する平均法の形式的な適用によって得られる安定条件(6.39)式と(6.41)式から定まる安定限界。

分, 言い換えれば, $s=0$ によって決められる安定限界は, (6.39)式, (6.41)式と(6.44)式のいずれからでも得られる。

上記の数値例によって明らかなように, 常微分方程式系に対する平均法を形式的に適用しても, 定常応答に関しては正しい結果を得るものの, 安定条件に関しては, 妥当な結果が得られない。

6.5 結 言

本章では, むだ時間を含む強制振動系(6.1)を, 自励系が2個の発振モードを有するとの仮定のもとで, 平均法によって解析した。まず, 2モードの自励振動周波数と入力周波数の間に, 13通りの相互関係(表6.1)があることを述べ, 代表的な6通りの場合について, 平均化方程式(常微分方程式)を導いた。そして, それらの平均化方程式に基いて, 定常応答とその安定条件を求めた。第5章に既出の結果については, すべてそれらと一致した。第5章で未検討の事項については, やや詳しく述べた。

最後に, 系(6.1)の解析に, 常微分方程式系に対する平均法を形式的に適用しても, 定常応答に関しては, 正しい結果が得られるものの, 安定条件に関しては, 妥当な結果が得られないことを, 数値例によって明らかにした。

第7章 結 論

本論文は、むだ時間を含む非線形振動系を、解析法の確立と振動現象の解明、の両面から研究したものである。具体的には、Minorsky方程式、および強制項をもつ Minorsky 方程式で記述される系（以下、Minorsky系と呼ぶ）を、考察の対象にした。

本研究で得られた成果を各章ごとにまとめると、次のようになる。

第2章と3章では、解析法に関連する事柄を述べた。

第2章では、差分微分方程式系に対する平均法の定式化と、そのために必要な線形自律系の分解理論について説明した。

第3章では、定常振動の安定判別への応用を目的として、むだ時間を含む線形周期系の安定問題を考察した。この問題への接近法として、次の3方法を与えた。(1)パラメータ値が既知の任意の1個の線形周期系について、その系が漸近安定であるか否かを判別する方法、(2)周期係数が小パラメータを含む場合について、連分数表示あるいは行列式表示された特性方程式から、直接的に特性指数を求める方法、(3)むだ時間を含む線形周期系の安定問題を、これと同じ特性指数をもつ、むだ時間を含まない線形周期系の安定問題に変換して論じる方法、である。これらの方法を用いて、むだ時間を含む Mathieu 方程式、ならびに、むだ時間を含む Hill-Meissner 方程式で記述される系の安定問題を考察した。両系の安定領域図、特性指数の軌跡図、および、周期係数が微小な場合の特性指数、などを与えることによって、むだ時間が、線形周期系の安定性と特性指数の性質に著しい影響を及ぼすことを明らかにした。

第4章、5章と6章では、主として、Minorsky系における振動現象について論じた。

第4章では、平均法によって、Minorsky系における自励振動を解析した。発振のモード数が1と2の場合についての解析例を示すとともに、平均化方程式のもつ物理的意味と、複数個の発振モードを有する場合は、第1近似に関する限り、各モード毎に独立に無振動系を選ぶことを述べた。そして、常微分方程式系に対する平均法を形式的に適用しても、正しい平均化方程式が得られないことを明らかにした。

第5章では、自励系が複数個（2個）の発振モードを有するとの仮定のもとで、Minorsky系における強制振動の諸性質を系統的に解明した。解析法には、定常振動の安定判別に、線形時変系の変分方程式を用いる方法を導入し、その有効性を示した。ここには、第3章の成果を応用するとともに、概周期振動の安定判別にもこの方法が拡張できることを示した。また、基

本調波振動の不安定化の機構を，飽和要素の増分記述関数を用いて説明した。理論値の妥当性は，波形解析機能をもつハイブリッド・シミュレータにより確認した。そして，Minorsky系の振動系としての諸性質は（むだ時間を含まない）多自由度非線形系のそれに類似であることを指摘した。

第6章では，第5章と同じ仮定のもとで，Minorsky系における強制振動を平均法によって解析し，結果が，第5章で得られたものと一致することを示した。さらに，Minorsky系の解析に，常微分方程式系に対する平均法を適用することの不当性を，数値例によって明らかにした。

付録 I 無限行列式 (3.10) の収束と $F(s)$ の性質 $1^\circ \sim 5^\circ$ の証明

(a) 無限行列式 (3.10) の収束と $F(s)$ の性質 1° の証明

(1) 特性方程式 (3.9) 式を導く際には触れなかったが、同次線形連立方程式 (3.8) 式が自明でない解をもつことと、(3.9) 式がなりたつこととが同値であると云えるのは、(3.10) 式右辺で与えられる無限行列式が絶対収束する場合である。⁽³⁹⁾ そこでまず、無限行列式の絶対収束の定義と、絶対収束を保証するための 1 個の十分条件について述べる。⁽³⁹⁾

一般に、無限行列式 $\det A$, ここに、

$$A = [A_{ik}] \quad ; \quad i, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

の絶対収束は次のように定義される。まず、対角要素の積

$$\dots \cdot A_{-2-2} \cdot A_{-1-1} \cdot A_{00} \cdot A_{11} \cdot A_{22} \cdot \dots, \quad (1.2)$$

は絶対収束する、言い換えれば、無限級数 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |A_{ii} - 1|$ は収束すると仮定する。つぎに、積 (1.2) の第 2 のインデックスをあらゆる仕方で互換することによって新しい積の列を作り、これらの積に互換の回数が偶数回なら + 符号を、奇数回なら - 符号を付与して加え合せる。こうして得られた無限級数 A が、たとえ各項中のすべての対角要素 A_{ii} を $1 + |A_{ii} - 1|$ で置き換えても絶対収束するならば、 $A = \det A$ と取り決め、 $\det A$ は絶対収束すると云う。

通常の有限次の行列式が有限積を項とする有限級数として定義されるのに対して、無限行列式は無限積を項とする無限級数として定義される。そして無限行列式が絶対収束するとは、これら無限積と無限級数がともに絶対収束する場合を指すのである。

さて、もし A の要素 A_{ik} ; $i, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ が変数 s の関数なら、 $\det A$ の値も s の関数になる。次の形の無限行列式、

$$\begin{aligned} A(s) &= \det [\delta_{ik} + a_{ik}(s)] \\ & \quad ; \quad i, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \\ \text{ここに, } \delta_{ik} &= \begin{cases} 1 & \dots i = k, \\ 0 & \dots i \neq k, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

の絶対収束と $\Delta(s)$ の正則性に関して、次の定理が与えられている。⁽³⁹⁾

定理 : ある領域 D で、各 $a_{ik}(s)$ は正則とする。もし、

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ii}(s)|, \quad (1.4)$$

ならびに、

$$\sum_{i,k=-\infty}^{\infty} |a_{ik}(s)|^2; i \neq k, \quad (1.5)$$

がともに D 上で一様に収束するならば、 $\det[\delta_{ik} + a_{ik}(s)]$ は D 上で絶対かつ一様に収束し、 $\Delta(s)$ は正則である。

(2) (3.11) で定義される集合 $\{P\}$ の点を除く全有界複素平面上で、無限行列式 (3.10) は絶対収束し、関数 $F(s)$ は正則であることを、上の定理に基いて証明する。

(3.10) 式右辺と (1.3) 式右辺を比較すれば判るように、この場合は $a_{ii}(s) = 0; i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ である。従って、定理の 1 条件 — 級数 (1.4) の一様収束 — は明らかに成立する。もう 1 つの条件 — 級数 (1.5) の一様収束 — は、無限行列式 (3.10) のブロック $H(2k, 2n)$ の (p, q) 要素を $H(2k, 2n)_{pq}(s)$ で表わすとき、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{k=-l \\ k \neq 0}}^l \sum_{p,q=1}^m |H(2k, 2n)_{pq}(s)|^2, \quad (1.6)$$

の一様収束性に帰す。

さて、複素平面上に任意に有界閉領域 D を取るとき、 $\det G(s)$ の零点に関する性質 ($F(s)$ の性質 1° 末尾参照) から、 D に含まれる集合 $\{P\}$ の点の個数はたかだか有限個である。ただし、 $\{P\}$ の点が境界上にないよう D を取っておく。これら有限個の点の近傍をそれぞれ任意に、しかし十分に小さく取り、それらの和を Ω とすれば、 $D - \Omega$ はやはり有界閉領域である。任意の k, n, p と q について、 $H(2k, 2n)_{pq}(s)$ が $D - \Omega$ 上で正則かつ有界であることは $D - \Omega$ の構成方法から明らかだろう。

つぎに、 $k, n (n \neq 0), p, q$ と s に依存しない正数 B が存在して、任意の $s \in D - \Omega$ に対し、

$$|H(2k, 2n)_{pq}(s)| \leq \frac{B}{|n|}; n \neq 0, \quad (1.7)$$

がなりたつことを示そう。まず $|n| \rightarrow \infty$ のとき、 $D - \Omega$ 上の s について一様に、

$$\begin{aligned}
& j2n\omega \cdot G^{-1}(s + j2n\omega) \\
&= \left[\frac{s + j2n\omega}{j2n\omega} I - \frac{1}{j2n\omega} U_0 - \frac{e^{-(s+j2n\omega)L}}{j2n\omega} V_0 \right]^{-1} \\
&\rightarrow I,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

なることから、正数 M を、

$$M = \max_{k, p, q} \sup_n \sup_{s \in D-Q} |[-U_{2k} - V_{2k} e^{-(s+j2n\omega)L}]_{pq}| \tag{1.9}$$

とすれば、与えられた正数 ε に対し、正整数 n_0 が存在して、 $|n| > n_0$ なる任意の n 、任意の $s \in D-Q$ 、任意の k, p と q について、

$$|2n\omega ||H(2k, 2n)_{pq}(s)| \leq M(1 + \varepsilon), \tag{1.10}$$

がなりたつ。いま M^* を、

$$M^* = \max_{k, p, q} \max_{1 \leq |n| \leq n_0} \sup_{s \in D-Q} |2n\omega ||H(2k, 2n)_{pq}(s)|, \tag{1.11}$$

とし、さらに B を、

$$B = (1/2\omega) \max[M(1 + \varepsilon), M^*], \tag{1.12}$$

とすれば、この B が不等式(1.7)を成立させることは明らかだろう。

不等式(1.7)がなりたてば、級数(1.6)は $D-Q$ 上で一様収束するから、(1)に述べた定理によって、 $D-Q$ における無限行列式(3.10)の絶対収束と $F(s)$ の正則性が言える。しかるに D と Q は任意であるから、結局、集合 $\{P\}$ の点を除く全有界複素平面上で上記のことが言える。

(3) $F(s)$ の極とその位数について考察する。さて、やはり複素平面上に任意に有界閉領域 D を取るとき、 D に含まれる集合 $\{P\}$ の点はたかだか有限個であるから、ある正整数 r が存在して、もし $|n| > r$ なら、 $\det G(s + j2n\omega) = \det[(s + j2n\omega)I - U_0 - V_0 e^{-(s+j2n\omega)L}]$ は D 上に零点をもたない。従って $|n| > r$ なら、 $G^{-1}(s + j2n\omega)$ の各要素は D 上で正則である。

つぎに、3.2.2節における(3.6)式から(3.10)式に至る過程において、(3.7)式で定義される c_{2n} から c_{2n}^* への変換を、 $n = \pm(r+1), \pm(r+2), \dots$ に制限することにより、無限行列式(3.10)に比べてたかだか有限個の要素のみが異なる無限行列式、

$$F^*(s) =$$

$$\det \left[\begin{array}{cccc} I & Q(2, 2r) & \cdots & Q(4r+2, -2r) H(4r+4, -2r-2) \\ H(-2, 2r+2) & G_{2r} & & \\ Q(-2, 2r) & G_0 & & Q(2, -2r) \\ H(-4r-4, 2r+2) & Q(-4r-2, 2r) & \cdots & Q(-2, -2r) I \end{array} \right], \quad (1.13)$$

を得る。ここに、

$$\left. \begin{aligned} G_{2n} &= G(s + j2n\omega) = [(s + j2n\omega)I - U_0 - V_0 e^{-(s+j2n\omega)L}], \\ Q(2k, 2n) &= [-U_{2k} - V_{2k} e^{-(s+j2n\omega)L}] \\ H(2k, 2n) &= Q(2k, 2n) G_{2n}^{-1} = Q(2k, 2n) G^{-1}(s + j2n\omega), \\ &; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

である。(1.13)式右辺の無限行列式は D 上で一様かつ絶対収束し、 $F^*(s)$ は正則である。なぜなら、(1.13)式右辺のすべての要素が D 上で正則かつ有界であることはこれら諸要素の定義から明らかであるし、(3.10)式右辺と(1.13)式右辺はただか有限個の要素のみしか異ならない以上、(1)に述べた定理の2条件——級数(1.4)と級数(1.5)の D 上での一様収束——も満たされるからである。 $F^*(s)$ の零点もやはり特性指数である。しかし、3.2.2節に述べた $F(s)$ の性質 $2^\circ \sim 5^\circ$ のうち、 2° 、 4° と 5° は $F^*(s)$ に対してはなりたたない。

さて、(1.13)式右辺に右から、

$$\det \left[\begin{array}{c} I \\ G_{2r}^{-1} \\ G_0^{-1} \\ G_{-2r}^{-1} \\ I \end{array} \right] \quad (1.15)$$

を掛け、積の公式 $\det A \cdot \det B = \det AB$ を適用すれば、[†] 無限行列式 (3.10) が得られる。従って、

$$\begin{aligned} F(s) &= F^*(s) \times (1.15) \\ &= F^*(s) \times \det G_{2r}^{-1} \times \cdots \times \det G_0^{-1} \times \cdots \times \det G_{-2r}^{-1} \\ &= F^*(s) / (\det G_{2r} \times \cdots \times \det G_0 \times \cdots \times \det G_{-2r}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

がなりたつ。上に述べたように $F^*(s)$ は D 上で正則である。また $\det G_{2r} = \det G(s + j2r\omega)$, \cdots , $\det G_{-2r} = \det G(s - j2r\omega)$ も明らかに正則である。従って、 D における $F(s)$ の極とその位数は、 D における、

$$\det G(s + j2r\omega) \times \cdots \times \det G(s) \times \cdots \times \det G(s - j2r\omega), \quad (1.17)$$

の零点とその位数に一致する。言い換えれば、 D における $F(s)$ の極は $\{P\} \cap D$ の点に一致し、 $s_1 \in \{P\} \cap D$, $s_1 = s_0 + j2n\omega$; $\det G(s_0) = 0$ とすれば、 s_1 における $F(s)$ の極の位数は、 s_0 における $\det G(s)$ の零点の位数に等しい。しかるに D は任意であるから、結局、全有界複素平面上で上記のことがなりたつ。

(b) $F(s)$ の性質 $2^\circ \sim 5^\circ$ の証明

性質 2° と 3° は次の 2 種類の公式から導かれる。その第 1 は、(3.8) 式中で定義される $H(2k, 2n)(s)$ に対して、

$$\begin{aligned} H(2k, 2n)(s + j2\omega) &= H(2k, 2n + 2)(s), \\ H(2k, 2n)(\bar{s}) &= \overline{H(-2k, -2n)(s)}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

がなりたつこと、その第二は、無限行列式 (3.10) をシンボリックに $\det [H(2k, 2n)(s)]$ と表わすとき、

[†] A , B と C を、それぞれ、

$$\begin{aligned} A &= [A_{ik}], \quad B = [B_{ik}], \quad C = [C_{ik}] = \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} A_{ij} B_{jk} \right], \\ &\quad ; \quad i, k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

とするとき、たとえ $\det A$ と $\det B$ がともに絶対収束する無限行列式であっても、積の公式 $\det A \cdot \det B = \det C$ は一般になりたない。積の公式がなりたつための 1 つの十分条件は、 \hat{C} を、

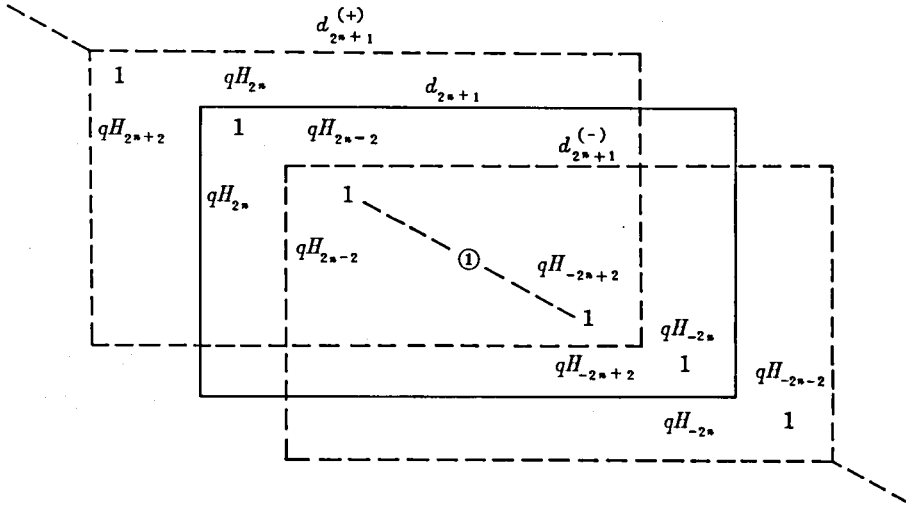
$$\hat{C} = [\hat{C}_{ik}] = \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} |A_{ij}| |B_{jk}| \right],$$

とするとき、 $\det \hat{C}$ が絶対収束することである。⁽²¹⁾ 無限行列式 (1.13) と (1.15) の積については、この十分条件は満されている。

付録Ⅱ (3.21) 式と (3.22) 式の誘導

この付録Ⅱでは、(3.21)式と(3.22)式を誘導する。便宜上、 N に対する諸条件のうち、 $1 \gg 1/N$ かつ $1 \gg a/N^2$ がなりたつことを第1の条件と呼び、 $1 \gg q^2/N^3$ がなりたつことを第2の条件と呼ぶ。

さて、 d_{2n+1} ； $n = 0, 1, 2, \dots$ は次の一群の漸化式によって計算される。すなわち $d_{2n+1}^{(+)}$ と $d_{2n+1}^{(-)}$ を、それぞれ図A.1の点線で囲まれる次数 $(2n+1)$ の行列式とすると、 $d_{2n+1}^{(+)}$ 、 $d_{2n+1}^{(-)}$ を、



図A.1 d_{2n+1} 、 $d_{2n+1}^{(+)}$ と $d_{2n+1}^{(-)}$ 。

$d_{2n+1}^{(+)}$ と $d_{2n+1}^{(-)}$ に関して次の漸化式がなりたつ。

$$\left. \begin{aligned}
 d_{2n+3} &= d_{2n+1} - q^2 H_{2n} H_{2n+2} d_{2n+1}^{(-)} - q^2 H_{-2n} H_{-2n-2} d_{2n+1}^{(+)} \\
 &\quad - q^4 H_{2n} H_{2n+2} H_{-2n} H_{-2n-2} d_{2n-1}, \\
 d_{2n+1}^{(+)} &= d_{2n+1} - q^2 H_{2n} H_{2n+2} d_{2n-1} + q^2 H_{-2n+2} H_{-2n} d_{2n-1}^{(+)}, \\
 d_{2n+1}^{(-)} &= d_{2n+1} + q^2 H_{2n-2} H_{2n} d_{2n-1}^{(-)} - q^2 H_{-2n} H_{-2n-2} d_{2n-1}, \\
 &\quad \text{ここに、} d_{-1} = 0, \quad d_1 = d_1^{(+)} = d_1^{(-)} = 1.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.1})$$

d_{2n+1} ; $n = 1, 2, \dots$ は, $d_3 \rightarrow d_3^{(+)} \rightarrow d_3^{(-)} \rightarrow d_5 \rightarrow d_5^{(+)} \rightarrow d_5^{(-)} \rightarrow d_7 \rightarrow \dots$ の順に計算することにより求まる。(3.21)式と(3.22)式の誘導は, (I.1)式から $d_{2n+1}^{(+)}$ と $d_{2n+1}^{(-)}$ を消去して得られる,

$$\begin{aligned} d_{2n+3} = d_{2n+1} [& 1 - q^2 H_{2n} H_{2n+2} - q^2 H_{-2n} H_{-2n-2}] \\ & - q^4 H_{2n-2} H_{2n}^2 H_{2n+2} d_{2n-1}^{(-)} - q^4 H_{-2n+2} H_{-2n}^2 H_{-2n-2} d_{2n-1}^{(+)} \\ & + q^4 H_{2n} H_{2n+2} H_{-2n} H_{-2n-2} d_{2n-1}, \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

を出発点にする。

さて(I.2)式中の $H_{\pm 2n}$ は(3.19)式から,

$$H_{\pm 2n} = \frac{e^{-j(\beta \pm 2n)L}}{-(\beta \pm 2n)^2 + a} \quad (\text{I.3})$$

で与えられるが, もし $n \geq N$ ——ここに N は第1の条件: $1 \gg 1/N$ かつ $1 \gg a/N^2$ を満す——ならば, 1に比べて微小量の $1/n$ と a/n^2 を無視することにより, $|H_{\pm 2n}|$ と $|H_{\pm 2n \pm 2}|$ は,

$$|H_{\pm 2n}| = |H_{\pm 2n \pm 2}| = -\frac{1}{4n^2}, \quad (\text{I.4})$$

で近似できる。また, N が同時に第2の条件—— $1 \gg q^2/N^3$ ——を満すなら, (I.2)式右辺第2項~第4項は第1項に比べて高次の微小量である。従ってこれらの項を無視すれば, (I.2)式は,

$$d_{2n+3} = d_{2n+1} [1 - q^2 H_{2n} H_{2n+2} - q^2 H_{-2n} H_{-2n-2}], \quad (\text{I.5})$$

となる。

さて, (I.4)式と(I.5)式から, $n \geq N$ なる n に対して,

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{q^2}{8n^4}\right) &< \left|\frac{d_{2n+3}}{d_{2n+1}}\right| < \left(1 + \frac{q^2}{8n^4}\right), \\ \left|\arg\left(\frac{d_{2n+3}}{d_{2n+1}}\right)\right| &< \frac{q^2}{8n^4}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.6})$$

がなりたち, (I.6)式を繰り返し適用することにより,

$$\prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{q^2}{8n^4}\right) < \left| \frac{d_{\infty}}{d_{2n+1}} \right| < \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 + \frac{q^2}{8n^4}\right), \quad (\text{I.7})$$

$$\left| \arg \left(\frac{d_{\infty}}{d_{2n+1}} \right) \right| < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{q^2}{8n^4} \quad (\text{I.8})$$

が得られる。しかるに、

$$\left. \begin{aligned} \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 + \frac{q^2}{8n^4}\right) &< \exp \left(\sum_{n=N}^{\infty} \frac{q^2}{8n^4} \right), \\ \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{q^2}{8n^4}\right) &> 1 - \sum_{n=N}^{\infty} \frac{q^2}{8n^4}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.9})$$

がなりたつから、(I.7)式は、

$$1 - \sum_{n=N}^{\infty} \frac{q^2}{8n^4} < \left| \frac{d_{\infty}}{d_{2n+1}} \right| < \exp \left(\sum_{n=N}^{\infty} \frac{q^2}{8n^4} \right), \quad (\text{I.10})$$

で置き換えてもよい。一方、

$$\frac{1}{3N^3} < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \frac{1}{3(N-1)^3}, \quad (\text{I.11})$$

であるから、 $\sum_{n=N}^{\infty} (q^2/8n^4)$ を $q^2/24N^3$ で近似し、さらに $\exp(q^2/24N^3)$ を $1 + (q^2/24N^3)$ で近似すれば、(I.10)式と(I.8)式は、

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{q^2}{24N^3} &< \left| \frac{d_{\infty}}{d_{2n+1}} \right| < 1 + \frac{q^2}{24N^3}, \\ \left| \arg \left(\frac{d_{\infty}}{d_{2n+1}} \right) \right| &< \frac{q^2}{24N^3}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.12})$$

となる。(I.12)式両式から、

$$\left| \frac{d_{2n+1} - d_{\infty}}{d_{\infty}} \right| < \frac{\sqrt{2} q^2}{24N^3}, \quad (\text{I.13})$$

を得る。

もし $L = 0$ ならば、 $H_{\pm 2n}$ と d_{2n+1} ; $n = 0, 1, 2, \dots$ などすべて実数になり、不等式(I.6)式に代って、

$$\frac{d_{2n+1}}{d_{2n+1}} = 1 - \frac{q^2}{8n^4}, \quad (\text{I.14})$$

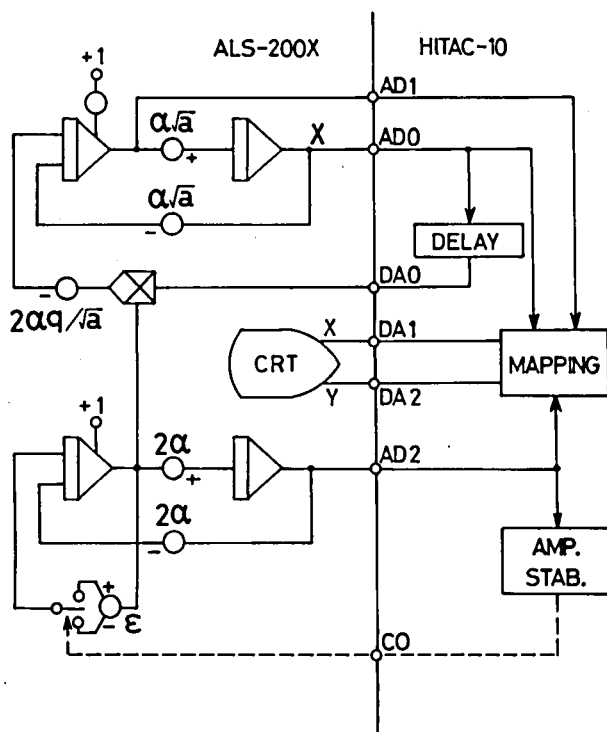
が近似的になりたつ。以下，（Ⅱ.6）式～（Ⅱ.13）式と同じ過程を経て，

$$\frac{d_{2n+1} - d_{\infty}}{d_{\infty}} = \frac{q^2}{24N^3} \quad , \quad (\text{Ⅱ.15})$$

が得られる。

付録Ⅲ 系(3.18)と系(3.48)のハイブリッド・シミュレータ構成図

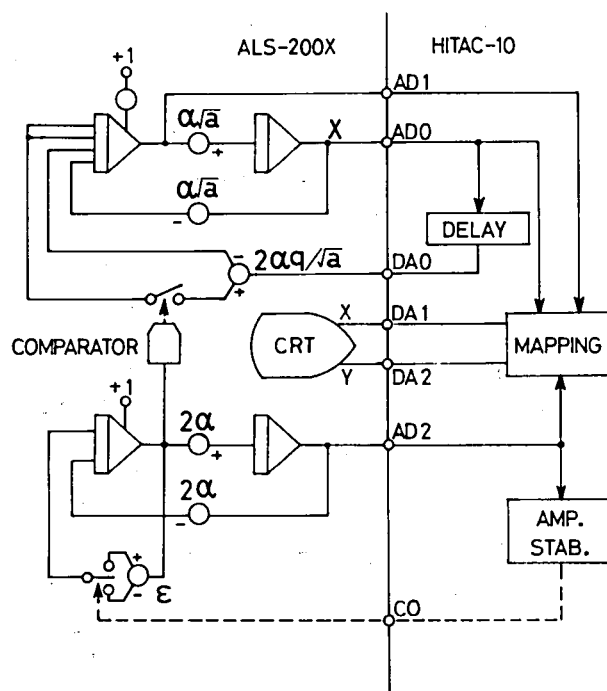
(a) 系(3.18)のハイブリッド・シミュレータ構成図



図A.2 系(3.18)のハイブリッド・シミュレータ構成図。

デジタル部の、DELAY, MAPPINGとAMP. STAB.の3機能の説明は、付録Ⅳを参照のこと。

(b) 系 (3.48) のハイブリッド・シミュレータ構成図



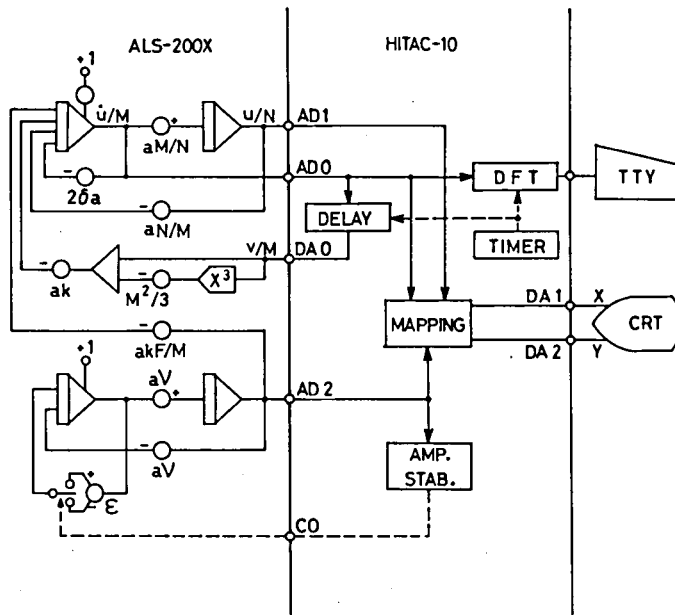
図A.3 系 (3.48) のハイブリッド・シミュレータ構成図。

デジタル部の、DELAY, MAPPINGとAMP. STAB. の3機能の説明は、付録Ⅳを参照のこと。

付録Ⅳ 系(5.1)のハイブリッド・シミュレータの構成

系(5.1)のハイブリッド・シミュレータについて説明する。(b)項で述べるように、このシミュレータは波形解析の機能を備えている。

(a) ハイブリッド・シミュレータの構成



図A.4 系(5.1)のハイブリッド・シミュレータ構成図。

図A.4は系(5.1)(図4.1の系)のハイブリッド・シミュレータの構成図である。アナログ部にはALS-200X(日立製)を、デジタル部にはHITAC-10(日立製)を使用しており、両者はAD・DA変換器(分解能10ビット=0.1%)と制御線(CO)によって結合されている。

このシミュレータは、以下の機能部分から構成されている。

- (1) 同調要素($ks/(s^2 + 2\delta s + 1)$)と飽和要素($f(v) = v - v^3/3$)の模擬,
- (2) むだ時間要素(e^{-sL})の模擬,
- (3) 正弦波信号($F \sin \nu t$)の発生,
- (4) 振動波形のマッピング像の表示,
- (5) 振動波形の離散的 Fourier 変換(波形解析用)。

これら(1)~(5)について説明しよう。

(1) 同調要素 ($ks/(s^2 + 2\delta s + 1)$) と飽和要素 ($f(v) = v - v^3/3$) の模擬。

これらは ALS-200X の積分器、加算器、3乗器と係数器などで構成した。

(2) むだ時間要素 (e^{-sL}) の模擬。

ディジタル部の機能要素 DELAY がそれである。ディジタル部の主記憶に N 語の領域を設定し、 T_s 秒間隔で、各番地に対して順次、(i) さきに記憶した内容を、DA変換器を通して、アナログ部へ出力する、(ii) アナログ部からの入力信号を、AD変換器を通してサンプルした後、記憶する、の2操作を施す。これにより、出力信号は入力信号より $L = T_s \times N$ 秒だけ遅延する。入力波形を忠実に再現するためには、サンプル周期 T_s は小さく、かつ AD・DA 変換器の分解能が高いことが望ましい。第5章の数値例 $L = 5.8$ 秒に対して、 T_s と N の値は、計算機時間が実時間の10倍高速であるとき、 $T_s = 1ms$ と $N = 580$ 、同じく50倍高速であるとき、 $T_s = 0.2ms$ と $N = 580$ 、などを用いている。この T_s の値は、実時間で $\omega = 1$ の周期波形に対して、628点/周期のサンプルを行うことに相当する。また、AD・DA変換器の分解能は、既に述べたように0.1%であるから、シミュレーション実行時における波形の再現性は良好である。

(3) 正弦波信号 ($F \sin \nu t$) の発生。

アナログ部で正弦波信号を発生させているが、そのままでは、振幅が時間とともに変化してしまう。そこで、発振振幅を常に監視し、これを一定値に保持する機能をディジタル部に設けている。AMP. STAB. がそれである。発振振幅が基準値より大きい小さいかを判断し、制御線 (CO) を通じて、アナログ部に振幅の増大または減少を指示する。

(4) 振動波形のマッピング像の表示。

ディジタル部における機能要素 MAPPING は、 $[u(t), \dot{u}(t)]$ のいわゆるマッピング像 $[u(2n\pi/\nu), \dot{u}(2n\pi/\nu)]$ ($n = \text{整数}$) を記憶し、それを CRT 上に表示することを行う。過去の $2^0 \sim 2^8$ 周期分のマッピング像を記憶し表示する。定常状態では、周期振動のマッピング像はいわゆる周期点からなる⁽¹⁴⁾。一方、概周期振動のマッピング像はいわゆる不変閉曲線上にあり、不変閉曲線の形状は、概周期振動に含まれる周波数成分によって決まる。⁽¹⁴⁾ シミュレーションの実行時に、振動が定常状態に達したか否かの判断と、安定限界に達したか否かの判断は、マッピング像の上記の性質に基づいて行っている。

(5) 振動波形の離散的 Fourier 変換。

ディジタル部における DFT の機能は、(1) アナログ部の出力波形を一定周期でサンプルし、(2) サンプル値列 (1024 点固定) に離散的 Fourier 変換を施した後、(3) その結果であるスペ

クトル番号，スペクトルの実部と虚部，およびその絶対値をデータ・タイプライタに出力することである。離散的 Fourier 変換には，高速 Fourier 変換のアルゴリズム⁽³⁾を用いている。[†]この機能は波形解析のためにあるが，波形解析の方法自身は続く (b) 項で説明する。

なお，DELAY と DFT におけるデータ・サンプルのためのタイミングは，水晶発振器（安定度 10^{-4} ）で制御された HITAC-10 の内蔵タイマから得ている。

(b) 波形解析の方法

このシミュレータには，波形解析の機能，具体的に云えば， $v(t) = \sum_{i=1}^n R_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ で表わされる概周期振動の波形 $v(t)$ の観測値から，各成分の振幅 R_i ，周波数 ω_i および位相 φ_i の値を分析するための機能が設けられている。この機能によって，周期振動のみならず概周期振動についても，振幅特性などの理論値の妥当性を，直接的に検証することが可能である。

波形解析の手順は，

- (1) シミュレータ出力 $v(t)$ を一定周期でサンプルし，記憶する。
- (2) サンプル値列（1024 点固定）に，離散的 Fourier 変換を施す，
- (3) (2) で得られたスペクトル列の値を，後に導く公式⁽²⁸⁾ ((N.8) 式，(N.10) 式と (N.11) 式) に代入することにより，原波形に含まれる各成分の振幅 R_i ，周波数 ω_i と位相 φ_i を求める。

の 3 段階の作業からなっている。(a) 項(5)で述べたように，(1) と(2) はシミュレータに組込まれているけれども，記憶容量の制限から，(3) はプログラム電卓で行っている。本 (b) 項では，この(3)について，具体的には，離散的 Fourier 変換の結果として得られる，言わば見掛け上のスペクトル列から，原波形に含まれる真のスペクトルを求めるための公式⁽²⁸⁾ について説明する。

- (1) 簡単のため，まず，原波形は正弦波，

$$\left. \begin{aligned} v(t) &= R \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \\ \text{ここに, } \varphi &= -\tan^{-1}(B/A), \quad \omega_0 \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{N.1})$$

であると仮定しよう。いま，この波形 $v(t)$ を，時刻 $-T$ から $T - \Delta t$ まで，周期 Δt でサンプルし，得られる $2N$ 個のサンプル値列を， $x(n)$ ； $n = 0, 1, \dots, 2N - 1$ とする。このサンプル値列に，

[†] 高速 Fourier 変換のためのプログラムには約 1.75 K 語を要した。演算は 16 ビット固定小数点で行い，計算所要時間は，データ・タイプライタへの出力を除けば，5 秒以下である。

$$X(k) = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} x(n) W^{k(n-N)T} , \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{ここに, } W = \exp(-j \frac{\pi}{T}) ; k = -N, -N+1, \dots, N-1, \end{array} \right\} \quad (\text{N.2})$$

で定義される離散的 Fourier 変換を施せば、スペクトル列 $X(k)$; $k = -N, -N+1, \dots, N-1$, ここに、

$$X(k) = \frac{1}{2} (A - jB) \frac{\sin(k\pi/T - \omega_0)T}{(k\pi/T - \omega_0)T} + \frac{1}{2} (A + jB) \frac{\sin(k\pi/T + \omega_0)T}{(k\pi/T + \omega_0)T} \dots\dots\dots (\text{N.3})$$

が得られる。 $X(-k) = \overline{X(k)}$ であるから、 $X(k)$; $k \geq 0$ のみを考えておけば十分である。また、このとき、観測時間が十分長いと云う仮定が満されれば、すなわち $T \gg 1$ ならば、(N.3) 式右边第2項は微小量として無視できる。従って、 $T \gg 1$ ならば、 $X(k)$; $k = 0, 1, \dots, N-1$ を、

$$X(k) = \frac{1}{2} (A - jB) \frac{\sin(k\pi/T - \omega_0)T}{(k\pi/T - \omega_0)T} , \quad (\text{N.4})$$

で与えてもよい。

いま、 $X(k)$ の実部、虚部および絶対値に対応するものとして、 a_k 、 b_k と r_k ; $k = 0, 1, \dots, N-1$ を、

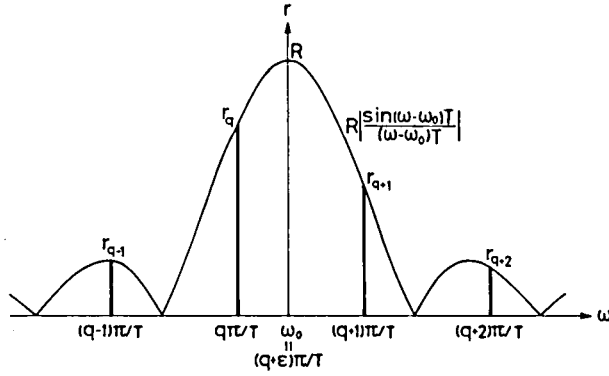
$$a_k - jb_k = 2X(k), \quad r_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2} , \quad (\text{N.5})$$

によって定義すれば、これらはそれぞれ、

$$\left. \begin{array}{l} a_k = A \frac{\sin(k\pi/T - \omega_0)T}{(k\pi/T - \omega_0)T} , \quad b_k = B \frac{\sin(k\pi/T - \omega_0)T}{(k\pi/T - \omega_0)T} , \\ r_k = R \left| \frac{\sin(k\pi/T - \omega_0)T}{(k\pi/T - \omega_0)T} \right| , \end{array} \right\} \quad (\text{N.6})$$

で与えられる。上式右边の A 、 B 、 R と ω_0 が原波形に関する未知パラメータである。従って、問題は、スペクトル列 a_k 、 b_k と r_k ; $k = 0, 1, \dots, N-1$ から、如何にして、 A 、 B 、 R と ω_0 の値を見出すか、である。

(N.6) 式第3式で与えられる、離散周波数 $k\pi/T$ とスペクトル r_k の関係を描いたものが図 A.5 である。ここに、スペクトル番号 q は、



図A.5 スペクトル列 r_k 。

$$q\pi/T \leq \omega_0 < (q+1)\pi/T, \quad (\text{N.7})$$

を満す整数である。 a_k と b_k についても、同様な図が得られる。図A.5から、原波形の真のスペクトル（振幅 R ，周波数 ω_0 ）と、スペクトル列 r_k ； $k=0, 1, \dots, N-1$ との間に、次の関係があることが判る。

1° もし、観測時間 $2T$ と原波形の周期 $2\pi/\omega_0$ が整数比でないならば、スペクトル列 r_k ； $k=0, 1, \dots, N-1$ は、原波形のスペクトルの両側にある一対の比較的大きいスペクトルとその外側に広がる多数の小さいスペクトルとからなる。これに対し、もし、 $T = n\pi/\omega_0$ (n = 整数) ならば、1本のスペクトルを除いて、他はすべて消えてしまう。この1本のスペクトルは原波形のスペクトルそのものである。

2° これらスペクトル列の先端は曲線 $R \left| \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{(\omega - \omega_0)T} \right|$ 上にある。

1° の性質によって、(N.7)式を満すスペクトル番号 q は容易に知ることができる。いま、

$$\omega_0 = (q + \epsilon)\pi/T, \quad \text{ここに } 1 > \epsilon \geq 0, \quad (\text{N.8})$$

とすれば、(N.6)式第3式によって、 r_q と r_{q+1} は、

$$r_q = R \frac{\sin \pi \epsilon}{\pi \epsilon}, \quad r_{q+1} = R \frac{\sin \pi \epsilon}{\pi (1 - \epsilon)}, \quad (\text{N.9})$$

で与えられる。逆に、 r_q と r_{q+1} が与えられれば、(N.9)式から、 ϵ と R は、

$$\epsilon = \frac{r_{q+1}}{r_q + r_{q+1}}, \quad R = r_q \frac{\pi \epsilon}{\sin \pi \epsilon}, \quad (\text{N.10})$$

と求まり、 ϵ を(Ⅱ.8)式に代入することにより、 ω_0 が求まる。 A と B も同様に、

$$A = a_q \frac{\pi \epsilon}{\sin \pi \epsilon}, \quad B = b_q \frac{\pi \epsilon}{\sin \pi \epsilon}, \quad (\text{Ⅱ.11})$$

などで求まる。結局、(Ⅱ.8)式、(Ⅱ.10)式と(Ⅱ.11)式によって、スペクトル列 r_k 、 a_k と b_k ； $k = 0, 1, \dots, N-1$ から、原波形の未知パラメータ R 、 ω_0 、 A と B を求めることができた。

周波数と振幅が既知の正弦波を試験信号として、上述の波形解析の精度を実測したところ、以下に示す結果が得られた。

- 周波数の値は、誤差0.01%以下で求まる。
- 振幅の値は、フル・スケール(10V)の0.3%以下の誤差で求まる。

周波数の測定精度は、主としてデータ・サンプルのタイミングを与えるHITAC-10内蔵タイマの精度に依存しており、振幅の測定精度は、主としてAD・DA変換器の精度に依存していると考えられる。

(2) つぎに、原波形が、

$$v(t) = \sum_{i=1}^n R_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \sum_{i=1}^n (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t), \quad (\text{Ⅱ.12})$$

のように、複数の周波数成分を含むと仮定しよう。この場合、離散的Fourier変換の結果として得られるスペクトル列 $X(k)$ ； $k = 0, 1, \dots, N-1$ は、(Ⅱ.4)式に対応して、

$$X(k) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (A_i - jB_i) \frac{\sin(k\pi/T - \omega_i)T}{(k\pi/T - \omega_i)T}, \quad (\text{Ⅱ.13})$$

で与えられる。すなわち、 $X(k)$ は、各周波数成分ごとのスペクトル列の代数和である。ここで問題になるのは、いわゆる漏れ(leakage)[†]による影響である。すなわち、(1)で述べた方法によって、各周波数成分ごとに R_i と ω_i などを求めようとすれば、他周波数成分からの漏れが誤差の原因になる。漏れの影響の度合は、(Ⅱ.13)式から判るように、 ω_i ； $i = 1, 2, \dots, n$ の相互の近接度と、観測時間 T の長さの両者に依存する。しかるに ω_i の近接度は現象に固有の性質であって制御できないから、ここでは、観測時間を長くすることによって、言い換えれば、データ・サンプル点数を多くすること(1024点)によって、漏れの影響の軽減を図って

† (1)で述べたように、 $T \neq n\pi/\omega_i$ (n =整数)のとき、スペクトルが分散する現象を言う。⁽³⁾

いる[†]。具体的に云えば、第5章で行うシミュレーションの実行時において、各 ω_i に対応するスペクトル番号 q_i ((Ⅱ.7)式参照)は、互に少なくとも50番以上離すことが可能であった。図A.5における主ローブ^{††}の高さを1とすれば、50番目のサイドローブの高さは、 $1/(50 + 0.5)\pi = 0.006$ であるから、上記のような場合に、他周波数成分からの漏れの影響を無視することは差し支えないと考えられる。

† 漏れを効果的に抑圧する方法として、スペクトル列の2階和分を用いる方法(second sum method)⁽²⁸⁾と、時間の窓(time window)を用いる方法⁽²⁾とが知られている。しかし本論文のシミュレーションでは、これらの方法を採用する必要性は感じられなかった。

†† 図A.5における曲線 $R|\sin(\omega - \omega_0)T|/(\omega - \omega_0)T|$ (一般には、スペクトルの窓)の中心にある大きいピークを主ローブ(main lobe)、その外側に広がる小さいピーク群をサイドローブ(side lobe)と云う⁽²⁾

付録Ⅴ 自励振動の自己変調現象^[12,13]

本付録Ⅴでは、 $|v|$ の最大値が1より大きい場合を考察の対象にするので、図4.1における非線形要素 $f(v) = v - v^3/3$ が、ここでは飽和としての機能をもたないことに注意しよう。

さて、系(4.1)には必ずしも正弦波形の自励振動ばかりでなく、振幅が周期的に変化する自励振動、言い換えれば、振幅変調波形をもつ自励振動も生じることが、P. A. Perepelyatnikによって指摘された。⁽³⁸⁾ 彼はこの現象を、自励振動の自己変調(self-modulation)と呼んでいる。甲田は、自己変調を伴う自励振動の存在を、計算機実験によって確認している。⁽²²⁾⁽²⁴⁾ しかしながら、両氏は、自己変調を伴う自励振動が如何なる周波数成分からなるのか、自己変調が生じることに對する物理的解釈、などについては触れていない。本付録Ⅴでは、系(4.1)のシミュレーションを通じて、むだ時間と非線形性がこの現象に對して果す役割を明らかにする。

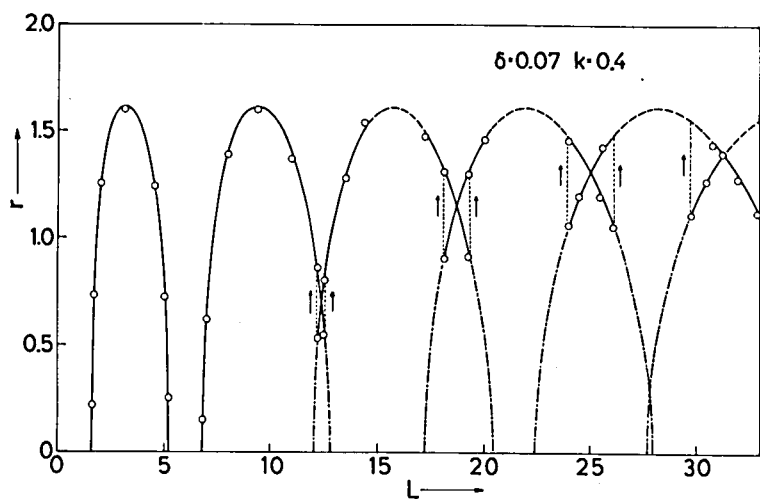
(a) シミュレーションによる自己変調現象の観察

まず、シミュレーションによって、自励振動の自己変調を観察してみよう。シミュレーションに際し、系のパラメータ δ と k は、(1)自励振動振幅が1を越えるように、同調要素の中心利得 $k/2\delta$ は十分大きいこと、(2)高調波の発生を抑えるため、同調要素の帯域幅 2δ は十分狭いこと、の2点から、

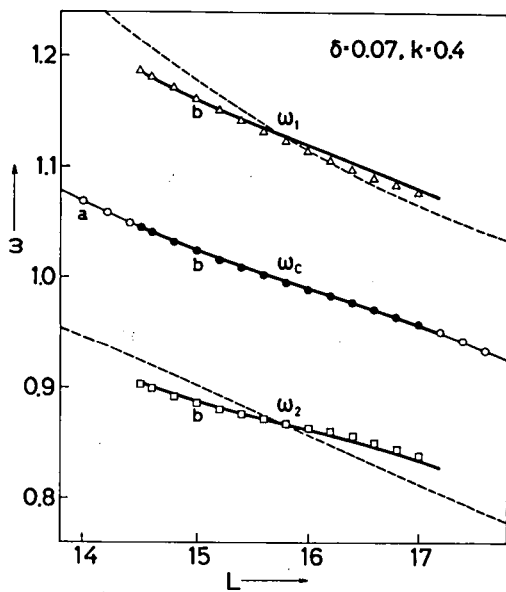
$$k = 0.4, \quad \delta = 0.07 \quad (k/2\delta = 2.86, \quad 2\delta = 0.14), \quad (\text{V.1})$$

とした。

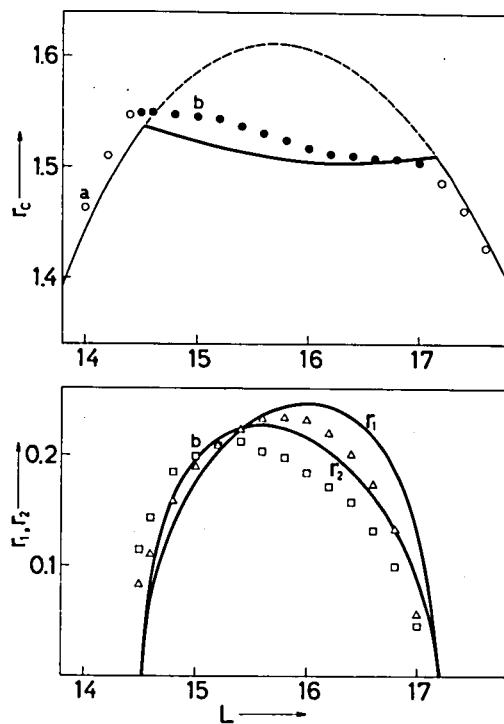
このパラメータに對し、むだ時間 L を0から33まで変化させて、自己変調が生じる領域を調べてみた。結果を図A.6に示す。図中の曲線は、 $r_0 = 2\sqrt{1+A(\omega_0)}$ から求めた正弦波自励振動の振幅特性を描いたものである。実線、破線と一点鎖線の区別は次のようである。実線：正弦波自励振動が安定に観測される領域（○印はこれに對する実験値）、破線：正弦波自励振動は不安定であり、代って、自己変調を伴う自励振動が生じる領域、一点鎖線：正弦波自励振動の安定条件(4.57)式が満されない領域。従って、図A.6の破線から判るように、自己変調は、発振振幅が極大になる付近で生じる。このとき、発振周波数は同調要素の中心周波数1の近傍にある。また、むだ時間が長くなるにつれて、自己変調が生じる領域は広くなる。



図A.6 自己変調の発生領域(破線)。



(a) 周波数



(b) 振幅

図A.7 自己変調を伴う自励振動の波形解析結果。

自己変調を伴う自励振動の波形解析の一例 ($L = 14.5 \sim 17.0$) を、図A.7に●印、△印

と□印で示す。○印は正弦波自励振動に対するものである。 L を 14.0 から増していくと、正弦波自励振動の周波数は 1 に近づき (図 A.7 (b) の ○印) それに伴って振幅も増大する (図 A.7 (b) の ○印)。 図 A.8 (a) は、正弦波自励振動の波形の一例 ($L = 14.0$) である。

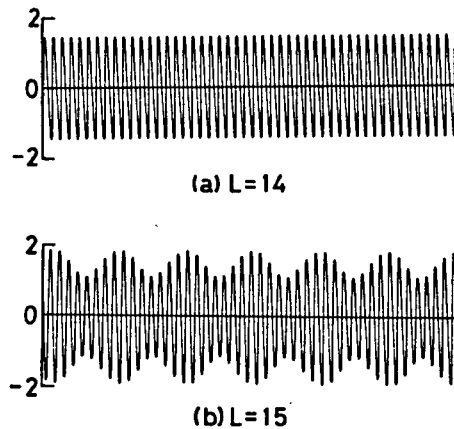


図 A.8 自励振動波形の一例。
(a) 正弦波自励振動。
(b) 自己変調を伴う自励振動。

L が 14.5 になると、それぞれが系 (4.1) の逆モード周波数 (図 A.7 (a) の破線, 4.2.2 節参照) に近い周波数をもつ 2 成分 (△印と□印) が同時に励起し、今までの正弦波自励振動を搬送波 (●印) に、新たに生じた 2 成分を側帯波 (△印と□印) とするような振動が生じる。これが自己変調を伴う自励振動である。波形の一例 ($L = 15.0$) を図 A.8 (b) に示す。図 A.7 中に b と記入したものが、その波形解析の結果である。 L をさらに増していくと、搬送波周波数が 1 になる付近で、側帯波振幅は最大になるが、その後は逆に減少し、 L が 17.2 になると自己変調は消滅し、正弦波自励振動に戻る。図 A.7 における太線は、自己変調を伴う自励振動を、

$$v = r_c \sin \omega_c t + r_1 \sin (\omega_1 t + \varphi_1) + r_2 \sin (\omega_2 t + \varphi_2), \quad (V.2)$$

ここに、 $\omega_1 + \omega_2 = 2 \omega_c$,

で近似し、調波解析法によって定常応答を求めた結果である。

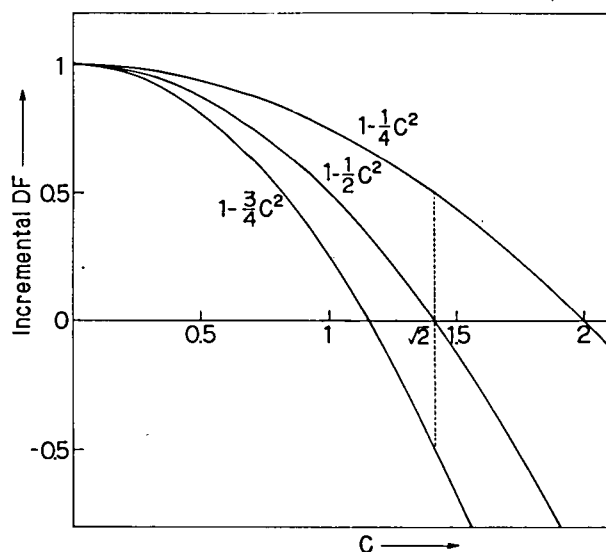
波形解析の結果から、自己変調は、逆モード周波数に近い周波数をもつ 2 成分 (側帯波) の出現によって、正弦波自励振動 (搬送波) が振幅変調作用を受けるために生じる、ことが明らか

かになった。ただし、 L がより大きい領域（例えば、 $L = 28$ 付近）では、側帯波成分の個数が3以上にもなりうるが、現象の本質は、上記の説明と変らない。

(b) 自己変調現象の発生機構

自己変調現象の発生機構について考察しよう。

まず、側帯波周波数が逆モード周波数に近い理由を説明する。さて、自己変調を伴う自励振動を、搬送波振幅 \gg 側帯波振幅であり、かつ完全な振幅変調波形をもつと理想化すれば、上述の理由は、5.3.4節(a)項で導いた非線形要素 $f(v) = v - v^3/3$ の増分記述関数を用いて、次のように説明される。図A.9は、上記の増分記述関数を図示したものである。(a)項



図A.9 非線形要素 $f(v) = v - v^3/3$ の増分記述関数。
 $1 - c^2/2$: 小信号が単一正弦波の場合。
 $1 - c^2/4$: 小信号が位相変調波の側帯波の場合。
 $1 - 3c^2/4$: 小信号が振幅変調波の側帯波の場合。

の結果によれば、自己変調は、正弦波自励振動幅がほぼ 1.5 を越えるあたりで生じているが、図A.9 から、 $c > \sqrt{2}$ では、小信号が振幅変調波の側帯波として重畳するとき、最も大きい利得を得ることができ、かつ c が大なるほど、その利得も大きいことが判る。また、利得の符号が負であることは、非線形要素において、小信号（側帯波）の位相が反転することを意味する。従って、側帯波周波数が逆モード周波数に近い理由は、非線形要素において側帯波の位相が反転するからである。

さて、系(4.1)のモード周波数と逆モード周波数は、周波数軸上で交互に現われ、そして、それらの相互の間隔は、 L が小さいほど広く、大きいほど狭い。この性質と、上述の、振幅変調波の側帯波としての、小信号利得の性質を総合すれば、自己変調の発生機構、言い換えれば、側帯波成分が励起する機構は次のように説明される。すなわち、発振周波数が1に近づくにつれて($L \rightarrow (2n+1)\pi$)、発振振幅は増大する。このとき、非線形要素における上記の小信号利得も増大し、同時に両隣りの逆モード周波数はともに1に近づくため、これら周波数における同調要素の利得も増大する。このような状態において、非線形要素と同調要素における小信号利得の積が、簡単に云って、1を越えるようになったとき、側帯波成分が励起するのである。

同じ発振振幅でも、 L が小さいと自己変調が生じない理由は、上に述べたモード・逆モード周波数間隔の広い・狭いから説明される。

参 考 文 献

- (1) Bellman, R., K. L. Cooke: Differential-Difference Equations, Academic Press Inc., 1963.
- (2) Blackman, R. B., J. W. Tukey: The Measurement of Power Spectra, Dover Publications Inc., 1958.
- (3) Brigham, E. O.: The Fast Fourier Transform, Prentice-Hall Inc., 1974.
- (4) Cunningham, W. J.: Nonlinear oscillators with constant time delay, J. of Franklin Inst., Vol. 261, p. p. 495-507, 1956.
- (5) Edson, W. A.: Frequency memory in multimode oscillators, Trans. IRE., CT-2, p. p. 58-66, 1955.
- (6) 福岡彰, 松原正一: 非線形制御系における跳躍共振の発生限界, 計測自動制御学会論文集, Vol. 1, No. 4, p. p. 304-315, 1965.
- (7) 古屋茂, 南雲仁一: 非線形振動論, 現代応用数学, B. 6-b, 岩波書店, 1957.
- (8) Halany, A.: Differential Equations, Stability, Oscillations, Time lags, Academic Press Inc., 1966. 日本語訳, 吉岡書店, 1968.
- (9) Hale, J. K.: Linear functional differential equations with constant coefficients, Contributions to Differential Equations, Vol. 2, p. p. 291-319, 1963.
- (10) Hale, J. K.: Averaging method for differential equations with retarded arguments and a small parameter, J. of Differential Equations, Vol. 2, p. p. 57-73, 1966.
- (11) Hale, J. K.: Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience Publishers Inc., 1969.
- (12) Hale, J. K.: Functional Differential Equations, Springer-Verlag, 1977.
- (13) Hayashi, C.: Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill Book Co., 1964.
- (14) 林千博, 上田院亮, 赤松則男, 板倉秀清: 周期的外力を加えた自励振動系の動作, 信学論, Vol. 53-A, No. 3, p. p. 150-158, 1970.
- (15) 市川邦彦: むだ時間をもつ飽和ゲイン制御系の安定性およびリミットサイクル, 機械学会論文集(第1部), Vol. 30, No. 215, p. p. 917-925, 1964.
- (16) 市川邦彦: むだ時間および高階非線形系の漸近法による解析, 機械学会論文集(第1部), Vol. 30, No. 218, p. p. 1289-1299, 1964.
- (17) 計測自動制御学会編: 改訂自動制御便覧, コロナ社, 1968.
- (18) Kishima, A.: Sub-harmonic oscillations in power circuits with series capacitors, Memoirs

- of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol. XXVII, Part 1, p. p. 89–105, 1965.
- (19) Kislyakov, V. S.: Application of the Krylov-Bogolyubov method of constructing asymptotic approximations to the investigation of systems with delay, *Avtomatika i Telemekhanika*, Vol. 21, No. 4, p. p. 442–455, 1960.
 - (20) Kislyakov, V. S.: Foundations for the application of the harmonic linearization method to an investigation of periodic oscillations in systems with delay, *Avomatika i Telemekhanika*, Vol. 21, No. 11, p. p. 1481–1489, 1960.
 - (21) Koch, H. von: Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis, *Acta. Math.*, Vol. 24, p. p. 89–122, 1900.
 - (22) 甲田精宏：時間遅れをもつ発振器における振動の自己変調について，*信学論*，Vol. 55–A, No. 10, p. p. 565–567, 1972.
 - (23) 甲田精宏：時間遅れをもつ発振器の強制同期について，*信学論*，Vol. 56–A, No. 12, p. p. 785–786, 1973.
 - (24) 甲田精宏：時間遅れをもつ発振器の振動について，*信学技報*，NLP 74–26, 1974.
 - (25) Krasovskii, N. N.: *Some Problems in the Stability of Motion* (in Russian), 1959. English translation, Stanford University Press, 1963.
 - (26) Krylov, N., N. N. Bogolyubov: *Introduction to Nonlinear Mechanics* (in Russian), 1937. English translation, *Ann. Math. Studies*, No. 11, 1947.
 - (27) Kuramitsu, M.: *Nonlinear Oscillations in a Self-Oscillatory System with Two Degrees of Freedom*, doctoral thesis, Kyoto University, Department of Electrical Engineering, 1974.
 - (28) Lanczos, C.: *Applied Analysis*, Prentice-Hall Inc., 1956.
 - (29) 松原正一：遅延帰還の線形理論，*電学誌*，Vol. 79, No. 852, p. p. 1151–1159, 1959.
 - (30) 松原正一：遅延帰還の非線形理論，*電学誌*，Vol. 80, No. 858, p. p. 271–279, 1960.
 - (31) 松原正一：遅延帰還の非線形理論（続報），*電学誌*，Vol. 80, No. 866, p. p. 1660–1667, 1960.
 - (32) McLachlan, N. W.: *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford University Press, 1947.
 - (33) Met, V.: On multimode oscillators with constant time delay, *Proc. I. R. E.*, Vol. 45, No. 8, p. p. 1119–1128, 1957.
 - (34) Minorsky, N.: Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions, *J. of Appl. Mech.*, Vol. 68, No. 6, p. p. A65–A71, 1942.
 - (35) Minorsky, N.: Self-excited mechanical oscillations, *J. of Appl. Phys.* Vol. 19, No. 4, p. p. 332–

338, 1948.

- (36) 南雲仁一：時間遅れを含む振動，信学会非直線委資料，1960.
- (37) Nishikawa, Y., P. Y. Willems: A method for stability investigation of a periodic dynamic system with many degrees of freedom, J. of Franklin Inst., Vol. 287, No. 2, p. p. 143–157, 1969.
- (38) Perepelyatnik, P. A.: Self-oscillations in an oscillator with delay, Radiotekhnika i Elektronika, Vol. 6, No. 10, p. p. 1601–1608, 1961.
- (39) Riesz, F.: Les Systèmes d'Equations Linéaires à une Infinité d'Inconnues, Gauthier-Villars, 1952.
- (40) Rubanik, V. P.: Oscillations in Quasilinear Systems with Delay (in Russian), Nauk, 1969.
- (41) 坂和愛幸：むだ時間をともなう非線形制御系における自励振動，制御工学，Vol. 6, No. 1, p. p. 32–36, 1962.
- (42) 坂和愛幸，菅田一博：むだ時間をもつ非線形の系における振動，電学誌，Vol. 83, No. 903, p. p. 2071–2079, 1963.
- (43) Shimanov, S. N.: The stability of quasi-harmonic systems with delay, P. M. M., Vol. 25, No. 3, p. p. 992–1002, 1961.
- (44) Shimanov, S. N.: On the theory of linear differential equations with periodic coefficients and time lag, P. M. M., Vol. 27, No. 3, p. p. 450–458, 1963.
- (45) Smirnov, V. I.: A Course of Higher Mathematics, Pergamon Press, 1964.
- (46) Stokes, A.: A Floquet theory for functional-differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 48, No. 8, p. p. 1330–1334, 1962.
- (47) 未崎輝雄，森真作，塚田正修：遅延線路を含む自励振動系，信学誌，Vol. 49, No. 7, p. p. 1293–1300, 1966.
- (48) 塚田正修：遅延線路を含む自励振動系，信学会非直線委資料，1965.
- (49) Valeev, K. G.: Investigation of the stability of the solutions of a linear differential equation with periodic coefficients and with stationary delays in the argument by the method of Hill, P. M. M., Vol. 26, No. 4, p. p. 755–761, 1962.
- (50) Valeev, K. G.: Linear differential equations with sinusoidal coefficients and constant time lag, Proc. of the fifth ICNO, Vol. 2, p. p. 100–119, 1963.
- (51) Venkatesh, Y. V.: Energy Method in Time-Varying System Stability and Instability Analyses, Lecture Notes in Physics, Vol. 68, Springer-Verlag, 1977.

- (52) Wall, H. S.: Analytic Theory of Continued Fractions, Chelsea Publishing Co., 1967.
- (53) West, J. C., J. L. Douce, R. K. Livesley: The dual-input describing function and its use in the analysis of non-linear feedback systems, Proc. IEE, Vol. B-103, No. 7, p. p. 463-474, 1956.
- (54) Whittaker, E. T., C. N. Watson: A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, 1958.
- (55) Yakoblev, V. N.: Application of the method of slowly changing parameters to the study of a nonlinear self-oscillatory system with delay, Radiotekhnika i Elektronika, Vol. 6, No. 12, p. p. 1974-1981, 1961.
- (56) 吉田洋一：函数論，岩波書店，1965.

本研究に関する著者の発表

- [1] 井上嘉明, 花崎一治, 久保田龍作: 時間遅れをもつ線形周期系の安定判別法とその応用, 信学技報, NLP 77-12, 1977.
- [2] 井上嘉明, 高瀬冬人: むだ時間を含む Hill-Meissner 方程式の安定問題, 信学技報, NLP 78-21, 1978.
- [3] 井上嘉明: むだ時間を含む線形周期系の安定判別, システムと制御, Vol. 23, No. 11, p. p. 667-674, 1979.
- [4] 井上嘉明: むだ時間を含む 2 自由度線形周期系の安定問題, 信学技報, NLP 80-28, 1980.
- [5] 井上嘉明: 平均法によるむだ時間を含む非線形系の解析, 信学技報, NLP 78-19, 1978.
- [6] 井上嘉明: 平均法によるむだ時間を含む非線形系の解析 (続報), 信学技報, NLP 78-27, 1979.
- [7] 井上嘉明, 上田院亮: 平均法によるむだ時間を含む自励振動系の解析, 信学論, Vol. J64-A, No. 3, p. p. 243-250, 1981.
- [8] 上田院亮, 井上嘉明: 時間遅れをもつ非線形系の強制振動, 電学論, Vol. 95-A, No. 6, p. p. 239-246, 1975.
- [9] 井上嘉明, 上田院亮: 時間遅れをもつ非線形強制系の概周期振動, 信学技報, NLP 75-11, 1975.
- [10] 井上嘉明, 上田院亮: 時間遅れをもつ非線形強制系の二周波概周期振動, 電学論, Vol. 96-A, No. 9, p. p. 441-448, 1976.
- [11] 上田院亮, 井上嘉明, 花崎一治, 吉田智知: 時間遅れをもつ非線形系の強制振動 — 分数調波, 高調波, 概周期振動, 信学技報, NLP 76-11, 1976.
- [12] 井上嘉明, 上田院亮: むだ時間を含む自励振動系における自己変調現象について, 信学技報, NLP 79-36, 1980.
- [13] 井上嘉明, 上田院亮: むだ時間を含む自励振動系における自己変調現象, 信学論, Vol. J64-A, No. 9, p. p. 791-792, 1981.